

---

## TALLER: LAS MATEMÁTICAS EN LOS MECANISMOS.

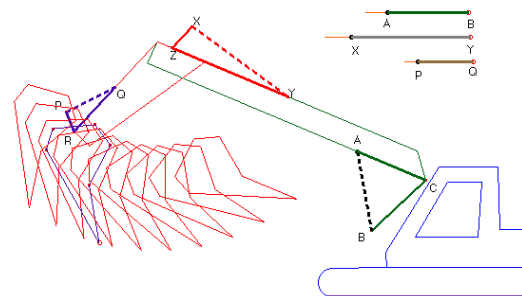
José Antonio Mora Sánchez. Profesor de E. Secundaria

---

### 1. *Presentación.*

En este taller se presenta una colección de máquinas que utilizan como base tres figuras geométricas básicas: el triángulo, el paralelogramo y el cuadrilátero. Tomando como punto de partida los trabajos de B. Bolt, (1970 y 1992), se han aprovechado los recursos del programa informático Cabri II para elaborar mecanismos que utilizan composiciones con barras articuladas. En estos diseños podemos imprimir movimiento a ciertos elementos con el fin de facilitar la comprensión del objeto analizado.

Para cada uno de los tres polígonos, se relata la secuencia de dibujo en Cabri II de forma que se resalten sus propiedades. Más adelante se analiza la forma en que esta construcción geométrica se utiliza en mecanismos de la vida cotidiana y en maquinaria de la construcción: la grúa, la excavadora, la balanza de dos platillos, el limpiaparabrisas del autobús, el movimiento de la pierna del ciclista al pedalear, el mecanismo de cierre automático de las puertas, etc.

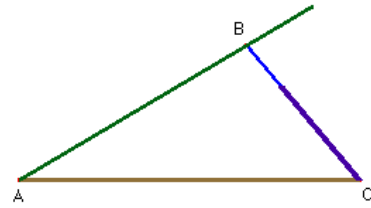


Visto de esta manera, los mecanismos se convierten en un contexto para hacer matemáticas y para comprender, a través de las matemáticas, el funcionamiento de muchos de los objetos que nos rodean. Es muy importante poder trabajar estos temas no sólo desde la óptica del profesor de matemáticas, sino aportar también la visión de otras áreas como la física, la tecnología, la educación física o cualquier otra área.

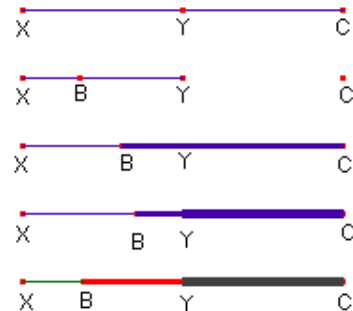
Este estudio se enmarca en la línea de trabajo que propone abordar las matemáticas a partir del estudio de los situaciones prácticas como puede ser el estudio de los mecanismos que utiliza la tecnología. Esto aporta a los estudiantes una más amplia comprensión de las matemáticas ya que entra en el proceso mismo de matematización de situaciones reales a partir de la investigación de los objetos del entorno. En el proceso es necesario discriminar los elementos esenciales de los accesorios. Después hay que traducir la situación real a la sintaxis del programa y a las mismas matemáticas y utilizar todas las herramientas al alcance de nuestra mano para resolver el problema planteado: medida, cálculo, utilización de propiedades y teoremas, etc.

## 2. El triángulo con un lado de longitud variable.

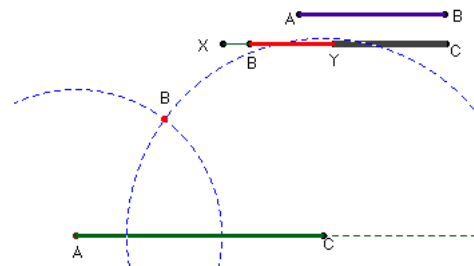
El cilindro hidráulico que se utiliza en volquetes y excavadoras nos sugiere una tercera vía para abordar el triángulo de base variable. Ahora los puntos A y C serán fijos y queremos que la mayor o menor longitud de CB determine la dirección del segmento AB.



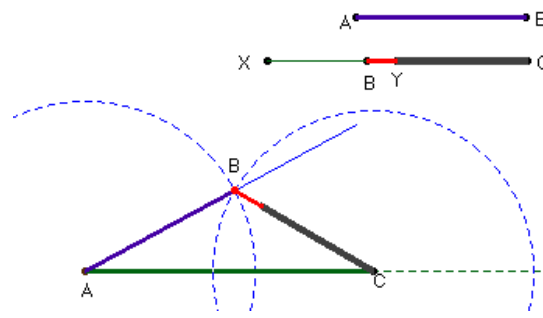
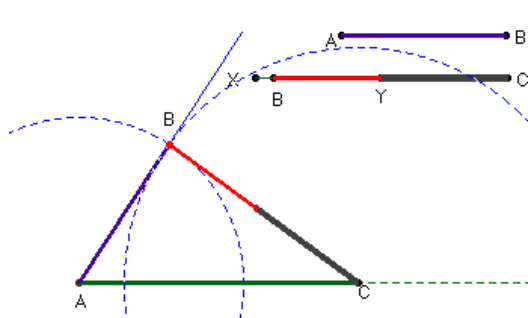
En Cabri II, para diseñar un cilindro hidráulico de longitud CB partimos de un segmento CX y llamamos Y al punto medio. El punto B será un punto cualquiera del segmento XY. Por la construcción realizada, la longitud del cilindro será CB, medida que estará siempre entre CX y CY. Se señala con trazo más grueso CB que es la base del cilindro, un trazo intermedio para YB que es la longitud que se ha expandido y más fina para BX, que indica la longitud máxima que puede alcanzar y se utilizan distintos colores en la presentación. Por último, podemos crear una macro que construya el cilindro completo cuando le dibujemos sus extremos.



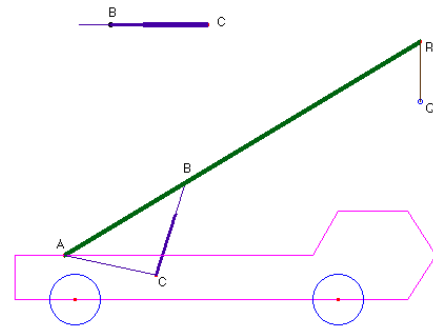
La construcción del triángulo que utiliza el cilindro hidráulico para alterar la inclinación de uno de sus lados se inicia con los dos segmentos de longitud fija: AB y AC. Si AC es el lado inmóvil, entonces B ha de ser un punto de la circunferencia de centro en A y radio AB. La circunferencia de centro en C y radio CB determina la longitud del cilindro hidráulico y uno de los puntos de intersección de estas circunferencias determina el punto B.



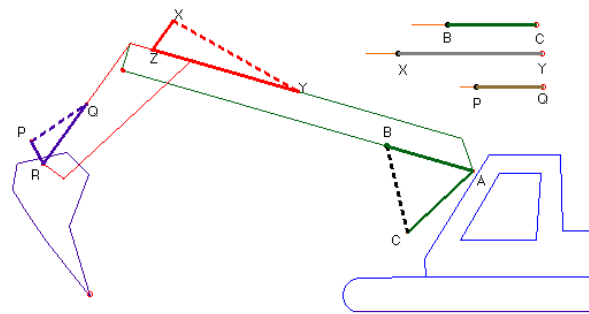
De esta forma ya tenemos el triángulo en el que el vértice B determina la dirección del tercer lado. El sistema se gobierna desde el punto B del segmento CB, que extrae el cilindro hidráulico hacia el exterior y con ello abre el ángulo CAB. Ahora no tenemos más que construir el triángulo y estudiar la relación entre la longitud del cilindro y la medida del ángulo.



La utilización del cilindro hidráulico como lado de longitud variable en un triángulo articulado es muy amplia en aquellas barras o plataformas que han de modificar su inclinación de acuerdo con nuestras necesidades, es el caso del brazo de la grúa.

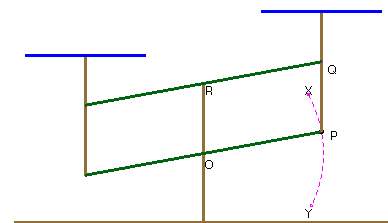


A veces puede ser conveniente combinar dos o más cilindros hidráulicos para conseguir el movimiento deseado como en el brazo articulado de la excavadora que está compuesta por dos barras articuladas, cada una con un cilindro hidráulico - ABC y XYZ -, que modifica su inclinación. Además, incorpora un tercer cilindro PQR para alterar el ángulo de la pala respecto de la barra a la que está sujeta. Con Cabri II podemos gobernar cada uno de los cilindros hidráulicos de la excavadora por separado como lo haría el operador en la cabina.

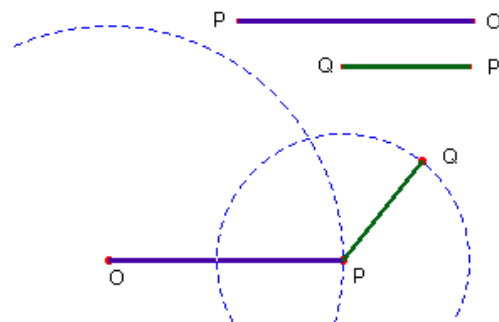


### 3. El paralelogramo articulado

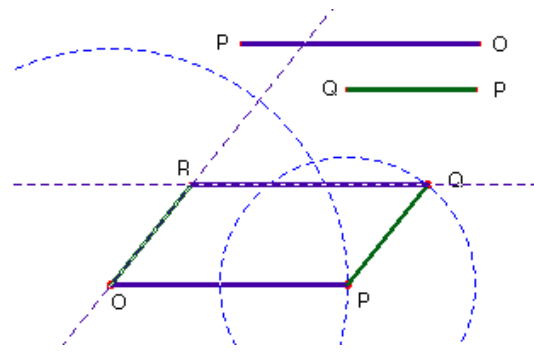
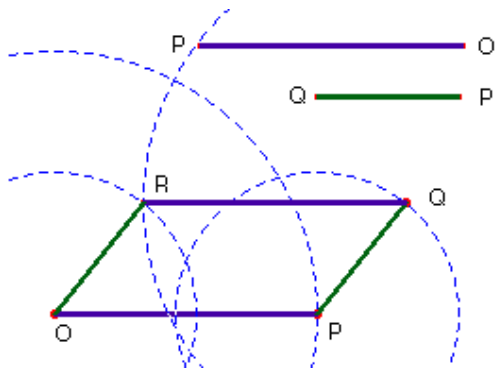
Es el cuadrilátero que tiene las varillas opuestas de la misma longitud. Se utiliza cuando queremos que se mantenga el paralelismo en diversas partes del sistema, como en la balanza en la que necesitamos que los platillos siempre se mantengan horizontales.



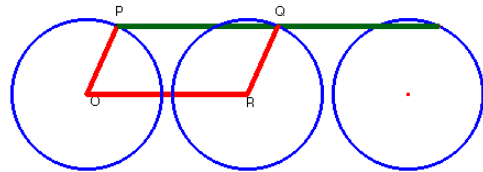
La construcción en Cabri II comienza por dos varillas de distinta longitud: OP y PQ. Si O es un vértice del paralelogramo, el siguiente P puede ser cualquier punto de la circunferencia de centro en O y radio OP. El punto Q lo situamos sobre la circunferencia que se dibuja al hacer compás en P con radio PQ.



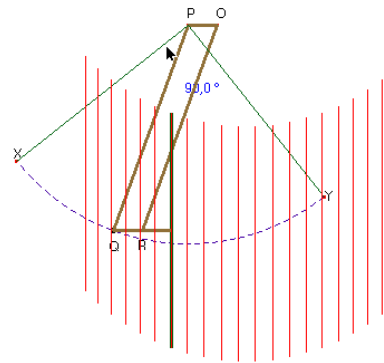
Este montaje, tal como está construido, tendrá dos grados de libertad; en P y en Q, aunque normalmente la barra OP se mantiene fija y es Q el que provoca el movimiento en el sistema. El punto R vendrá determinado por la intersección de dos circunferencias o bien por el paralelismo de los lados.



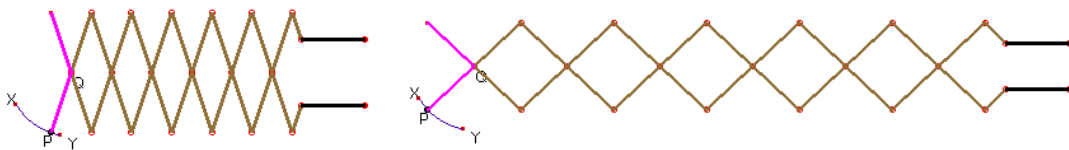
El sistema en paralelo se utiliza en las ruedas de los trenes, para transmitir el movimiento de las ruedas motrices a las demás, para que todas giren al mismo tiempo.



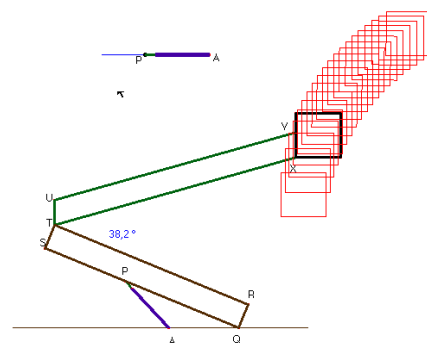
Los limpiaparabrisas de los autobuses deben barrer una superficie mucho mayor que la de los coches, es conveniente que la escobilla se mantenga siempre en posición vertical para que despida el agua de los cristales. En el diseño de Cabri II se ha dibujado el lugar geométrico de la escobilla, es decir, las distintas posiciones que ocupará esta barra cuando el punto P tome 20 posiciones equidistantes sobre el arco sobre el que está situado.



Las pinzas extensibles se basan en la combinación de varios rombos articulados. Al unir los puntos P y Q, las pinzas se extienden con gran rapidez a la vez que las barras del extremo se cierran para agarrar el objeto.

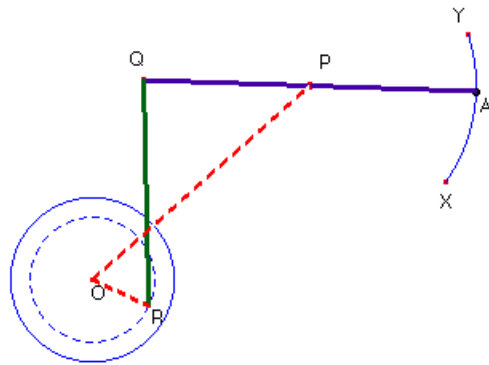


Las barquillas de reparación del alumbrado necesitan trabajar a distintas alturas, mientras el operario se mantiene en una cabina que ha de mantenerse en una posición siempre paralela al suelo, aunque se inclinen los brazos que la sustentan. Esto se consigue con la combinación de dos paralelogramos articulados que se conectan en un ángulo fijo STU. Se ha dibujado el lugar geométrico de las barquillas, 20 de las posiciones que ocuparía cuando se extiende el cilindro hidráulico que le hace elevarse.

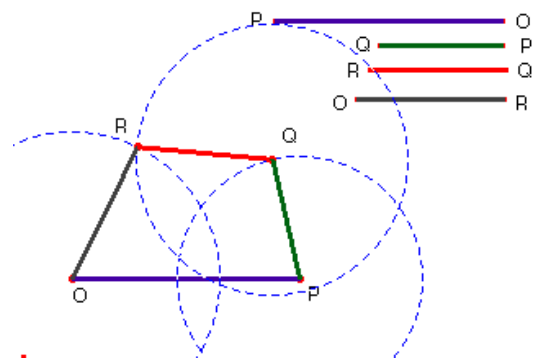
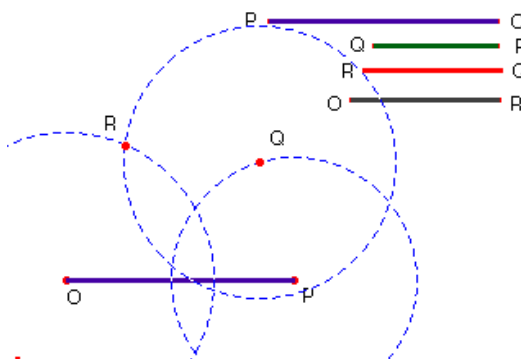


#### 4. El cuadrilátero articulado

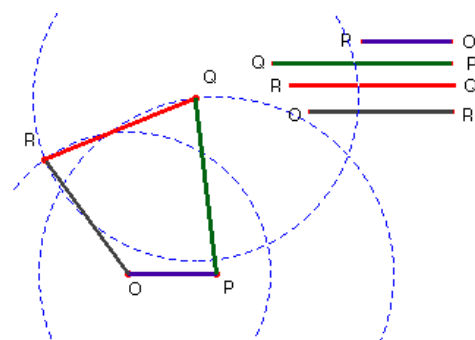
El cuadrilátero articulado está formado por cuatro varillas de distinta longitud unidas por sus extremos. Suele tener un segmento fijo OP -bastidor-, y el resto de las varillas son móviles. Se suele utilizar para transformar un movimiento de rotación en otro de vaivén y al contrario. El esquema de la derecha pertenece al mecanismo de derecha pertenece al mecanismo de funcionamiento del trole que vemos en las películas del oeste. El punto A se mueve sobre un arco arriba y abajo, acciona en Q el movimiento del cuadrilátero OPQR para que R –y la rueda- gire alrededor de O trole se desplace por la vía.



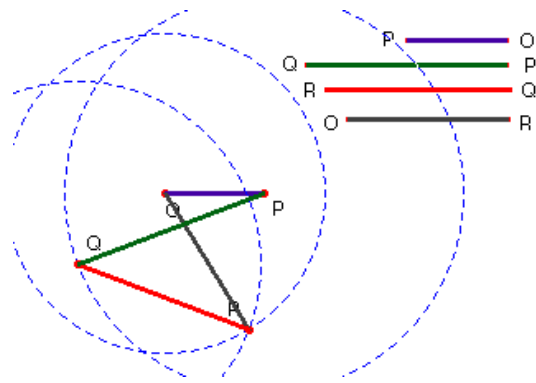
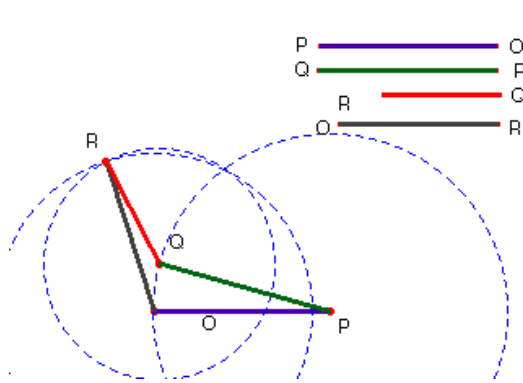
La construcción del cuadrilátero articulado con Cabri II parte de los cuatro segmentos dibujados previamente, uno de los cuales OP será el bastidor. Q será un punto cualquiera de la circunferencia de centro P y radio PQ, mientras que R será el punto de intersección de dos circunferencias: la de centro en O y radio OR y la de centro en Q y radio QR.



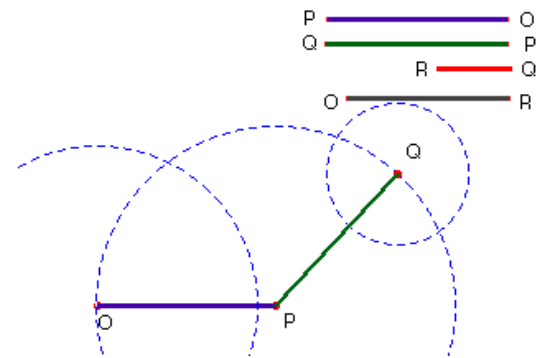
La construcción previa de las cuatro barras que después se articularán favorece el estudio posterior, al permitir que modifiquemos las condiciones iniciales, desde el exterior de la construcción, cuando alargamos o acortamos cualquiera de los segmentos dibujados.



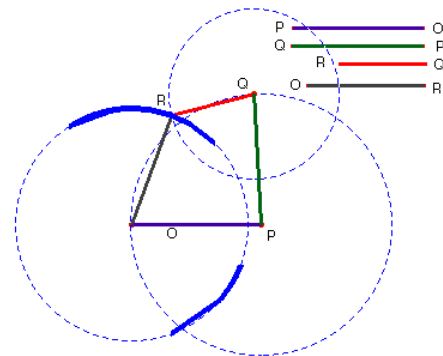
Al haber construido el cuadrilátero con varillas articuladas, pronto surgen figuras que no suelen aparecer sobre el papel como los cuadriláteros cóncavos y también otros como los cuadriláteros cruzados que hacen surgir las dudas acerca de si serán o no polígonos. Hay un interesante artículo de D. Crawforth (1988) sobre el aprovechamiento didáctico en clase de esta situación.



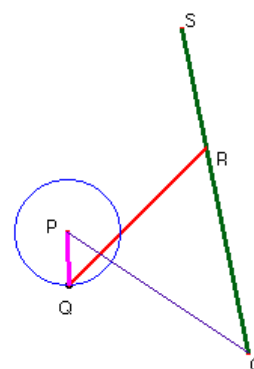
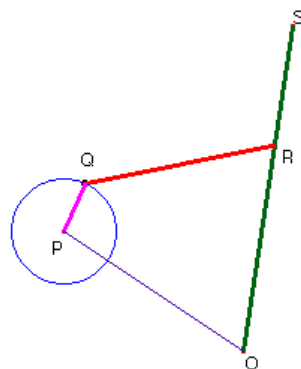
Además, encontramos situaciones en las que el cuadrilátero deja de existir, es decir, no se puede construir con las condiciones iniciales. El caso más evidente se produce cuando uno de los lados es mayor que la suma de los otros tres, pero hay muchos otros .



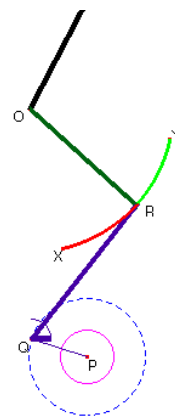
La herramienta *Lugar Geométrico* facilita el estudio para averiguar en qué condiciones podemos construir un cuadrilátero. Si obtenemos las posiciones de R, cuando Q toma 50 posiciones equidistantes unas de otras sobre la circunferencia sobre la que se mueve, generalmente se dibujan uno o dos arcos (marcados con trazo grueso en azul) que indican aproximadamente las soluciones para el cuarto vértice del cuadrilátero.



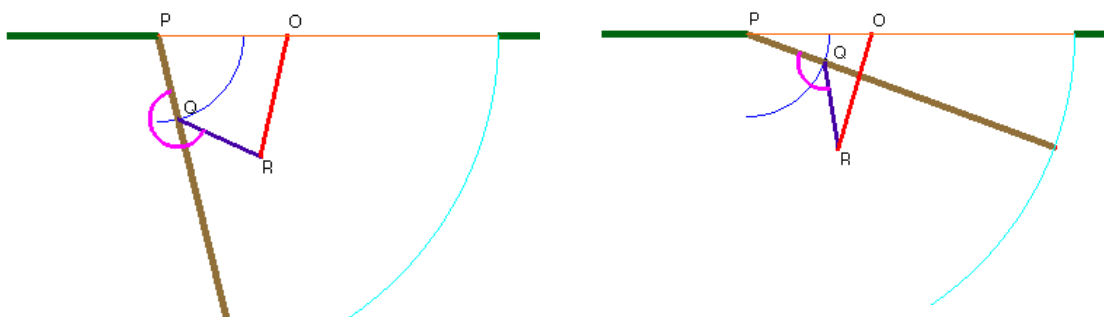
El cuadrilátero articulado se utiliza para intercambiar un movimiento circular uniforme en otro de vaivén. Tenemos un ejemplo en el agitador, en el que un movimiento uniforme de Q alrededor de P produce un movimiento oscilante en la barra OS que sigue a R mediante la biela QR.



En el esquema de las piernas del ciclista, cuando realiza el pedaleo, es el muslo el que actúa de impulsor para que la rodilla R describa un arco y el pie gire llevando consigo el pedal.



El mecanismo de cierre de algunas puertas también está basado en un cuadrilátero en el que el segmento OP está sujeto al marco y el punto Q describe un arco que arrastra la puerta gracias a un muelle.



### Bibliografía.

- BOLT, A. B. y HISCOCKS (1970). *Machines, mechanisms and mathematics. Mathematics for the Majority Project.* Chatto & Windus. The School Council. London.
- BOLT, B. (1992). *Matemáquinas. La matemática que hay en la tecnología.* Labor: Barcelona.
- CRAWFORTH, D. (1988). ¿Qué es un cuadrilátero?. En Walter, M. *Geometry.* M.E.C. Madrid.
- CUNDY, H. M. et ROLLET, A. P. (1978). *Modèles mathématiques.* CEDIC: Paris.
- MORA, J.A. (1997). De la calle al ordenador. *Revista Aula* núm. 58. Enero de 1997 pp. 20-21.
- O'DAFFER P. Y CLEMENS S. (1977). *Geometry: an investigative approach.* Addyson-Wesley: California.