ÍNDICE

PRIMERA PARTE

ANÁLISIS

CÁLCULO DIFERENCIAL y CÁLCULO INTEGRAL

Los presentes apuntes son una edición de los antiguos de COU adaptada al cambio del nuevo Bachillerato. Fundamentalmente son los mismos, convenientemente ‘descafeinados’ suprimiendo partes que ya no incluye el programa. Al mismo tiempo, cada tema necesita algunas horas de introducción y repaso de conceptos que no maneja bien el alumno o que tal vez no ha estudiado al nivel que se hacia en BUP, por ejemplo los limites, las derivadas o la trigonometría.

La parte de la Matemática que tiene más aplicaciones en la Ciencia y en la Técnica es, precisamente, el Cálculo Diferencial e Integral.

El estudio de esta parte se inició de forma superficial en 1º. de Bachillerato. Ahora se completan todos los conocimientos elementales del Cálculo.

Si quisiéramos resumir al máximo, diríamos que el Cálculo Diferencial es el estudio de la variación de una función según la variación de la/s variable/es. El Cálculo Integral trata de la resolución de las ecuaciones diferenciales así como del cálculo de sumas de infinitos sumandos ("infinitamente pequeños", en general), necesario, por ejemplo, para hallar el área de un recinto plano limitado por funciones (y aquí está su origen). El punto de unión de ambos estudios es el Teorema Fundamental del Cálculo Integral, que relaciona la integral indefinida (perteneciente al Cálculo Diferencial) y la definida (medida de áreas).

Las principales aplicaciones de todo ello, y que el alumno puede ver en este curso, están en la Física. En efecto, desde el estudio de los movimientos hasta el estudio del electromagnetismo, pasando por los momentos de inercia, se tiene una buena muestra de las aplicaciones del Cálculo.

Los temas a tratar son:

- Continuidad y derivación. Teoremas fundamentales.
- Integral indefinida. Métodos de integración.
- Integral definida. Aplicaciones.

Hay que tener en cuenta que el desarrollo de los temas anteriores constituye un alto porcentaje de lo que es el Cálculo en su totalidad y que, en consecuencia, de todos ellos existen grandes tratados de muchas páginas. Es evidente que nosotros solo podremos profundizar hasta un determinado nivel: el considerado básico para iniciar los estudios universitarios.

Como todos los alumnos de este curso no realizarán los mismos estudios posteriores, no resulta fácil situar el nivel anterior. Por este motivo, podrá profundizarse más o menos una vez conocido el grupo de alumnos correspondiente, así como sus conocimientos anteriores, que no siempre están a la altura deseada. De todas formas, existe una referencia mínima, que poco a poco se ha ido convirtiendo en obsesión, para alumnos y profesores, a lo largo del curso: las pruebas de selectividad.

Tema 1

FUNCIONES CONTINUAS

0) CONOCIMIENTOS PREVIOS.

Se iniciará el tema haciendo un repaso del concepto de limite de funciones: definición, propiedades y cálculo de limites

1) FUNCIONES CONTINUAS: DEFINICIÓN.

Una función es continua en un punto x_o si $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$ lo que presupone que está definida y que tiene límite en ese punto.

Una función es continua en un intervalo cuando lo es en todos sus puntos interiores y, si es cerrado, lateralmente en los extremos (por la derecha en a y por la izquierda en b).

Gráficamente, la representación de la función en ese intervalo se puede realizar sin levantar el lápiz del papel ('continuidad' equivale a trazo sin interrupción).

Los puntos donde una función no es continua se denominan puntos de discontinuidad. Según la definición anterior, una discontinuidad se puede producir por alguno de los siguientes motivos:

a) Existe $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ pero no existe $f(x_o)$ o, existiendo, no coincide con el límite (se denomina punto de *discontinuidad evitable*).

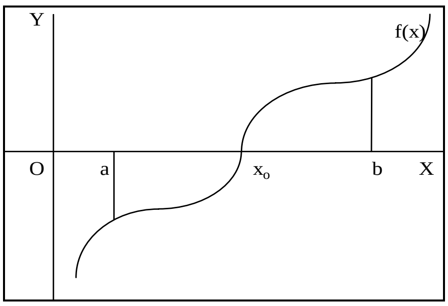
b) En el punto x_o no coinciden los límites laterales o bien el límite es $\pm\infty$ (*discontinuidad de primera especie*).

c) En el punto x_o no existe alguno de los límites laterales (*discontinuidad de segunda especie*).

TEOREMA DE BOLZANO.-Si f es continua en [a,b] y toma valores de signo opuesto en los extremos, existe al menos un punto $x_o \in (a,b)$ tal que $f(x_o)=0$.

Interpretación geométrica:

Si en un extremo la curva está sobre el eje OX y en el otro por debajo, habrá al menos un punto donde corta al eje OX.

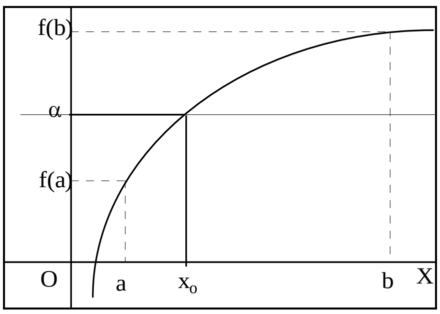


Hay que tener muy presente, a la hora de los ejercicios, que el hecho de que no se cumplan las condiciones no implica que no exista un punto en el segmento donde la función se anule (incluso puede haber infinitos). ¡Ojo con esto!.

Consecuencia del teorema de Bolzano:

TEOREMA DE LOS VALORES INTERMEDIOS (DARBOUX).- Si una función f es continua en [a,b], toma, al menos una vez, todos los valores comprendidos entre f(a) y f(b).

Interpretación geométrica.- Si desde un punto α cualquiera, comprendido entre f(a) y f(b), se traza una paralela al eje OX, ésta cortará a la curva al menos en un punto.



Demostración.- Si f(a)=f(b) no hay nada que decir. Si f(a)<f(b), sea α tal que $f(a)<\alpha<f(b)$.

Considerando la función g como $g(x)=f(x)-\alpha$ cumple las condiciones del teorema de Bolzano. De ello se deduce que existe al menos un punto x_o de (a,b) en el que se cumple $g(x_o)=f(x_o)-\alpha=0$, luego $f(x_o)=\alpha$. Si f(a)>f(b) el razonamiento es similar.

2) FUNCIONES ACOTADAS.

Suponemos conocidos los conceptos referentes a la acotación de funciones.

Teorema previo.- **Toda función continua en un segmento cerrado [a,b] está acotada en el mismo.** No es cierto el reciproco: una función puede estar acotada y no ser continua.

TEOREMA DE BOLZANO-WEIERSTRASS.- **Toda función continua en un segmento cerrado [a,b] alcanza en el mismo un valor máximo y otro mínimo**.

Dicho en otras palabras, existen dos puntos $m,M \in [a,b]$ tales que para todo x de [a,b] es $f(m) \leq f(x) \leq f(M)$. Los números f(m) y f(M) son el mínimo y máximo absolutos de la función f en el intervalo [a,b].

Tema 1: EJERCICIOS

1.1.- Estudiar la continuidad de las funciones siguientes:

a) $f(x)=(x-1)/(x^2-4)$ b) $f(x)=\ln\sqrt{x-1}$ c) $f(x)=3|x|+5$ d) $f(x)=tg.x$ en $[\pi/4,3\pi/4]$

e) $f(x)= x^2/(1+x^2)$ f) $f(x)=x-E[x]$ g) $f(x)=x/|x|$

1.2.- ¿Es aplicable el teorema de Bolzano $f(x)=tg.x$ en $[\pi/4,3\pi/4]$?.

1.3.- Dada la función $f(x)=sen(x)-3$ si $-\pi/2\leq x<0$, $2a+x$ si $0\leq x\leq\pi$, ¿para que valores de a se le puede aplicar el teorema de Bolzano en el segmento de definición.

1.4.- Demuéstrese, utilizando el teorema de Bolzano, que $x.sen(x)=1/2$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0,\pi]$.

1.5.- Demuestra que $f(x)=e^x-x-3$ se anula alguna vez en $(0,\infty)$.

1.6.- ¿Es cierto que $f(x)=x^7-3x^6+2sen(\pi x/2)$ se anula en algún punto comprendido entre 3 y 4?. Enuncia el resultado teórico en que se basa la respuesta.

1.7.- Si $f(x)=x^3+x^2-cos(\pi x)$, demostrar que existe un valor $x_o< 2$ y positivo tal que $f(x_o)=3$.

1.8.- Demuéstrese que las ecuaciones siguientes tienen al menos una solución real:

$2x^3-6x+1=0$, $cos(2x)-2x+1=0$, $3x^5-4x^2+3x+2=0$, $x^{2007}+x+1=0$

1.9.- Demuestra que la ecuación $tg(x)=x$ tiene infinitas raíces reales.

1.10.- Demuestra que toda ecuación polinómica de grado impar tiene al menos una solución real.

1.11.- ¿Puede afirmarse algo parecido para las funciones polinómicas de grado par ?.

1.12.- Prueba que la función $f(x)=x(sen(x)+1)$ toma el valor 2 en algún punto.

1.13.- ¿Existe algún punto $x_o\in(\pi/3,4\pi/3)$ donde la función $f(x)=x/sen(x)$ se anule?.

1.14.- Si f y g son dos funciones continuas en [a,b] tal que $f(a)<g(a)$ y $f(b)>g(b)$, demuestra que existe algún punto $x_o\in(a,b)$ donde $f(x_o)=g(x_o)$.

1.15.- Estudia la acotación de las funciones siguientes, diciendo, además, si alcanzan máximo y/o mínimo absolutos en el intervalo indicado:

a) $f(x)=|x|$ en todo **R** b) $f(x)=E[x]$ en $[-6,8]$ c) $f(x)=1/(1+x^2)$ en $[-1,1]$

d) $f(x)=4/(x^2-2)$ en todo **R** e) $ln(x)$ en $(0,1)$

1.16.- La función $f(x)=1/x$ no tiene en $[0,1]$ máximo absoluto.¿ Está esto en contradicción con el teorema de Weierstrass ?.

1.17.- La función f, definida en [0,1] por $f(0)=0$, $f(1)=1$ y $f(x)=1-x$ si $x\in(0,1)$ ¿ cumple el teorema de Darboux ?.

Tema 2

FUNCIONES DERIVABLES

1) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN.

Derivada de una función en un punto.- Una función f es derivable en un punto x_o cuando existe $\lim\limits_{h\to 0}.\dfrac{f(x_o+h)-f(x_o)}{h}$.

Este límite se llama derivada de la función f en el punto x_o, y lo denotamos así: $f'(x_o)$.

Si ponemos $x=x_o+h$, $h\to 0$ equivale a $x\to x_o$, por lo cual la definición anterior puede expresarse como $f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_0}.\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$.

Una función es derivable en un intervalo cuando lo sea en todos sus puntos interiores y, si es cerrado, lateralmente en los extremos (por la derecha en a y por la izquierda en b).

Si f es derivable en un intervalo, la función que asigna a cada punto x del mismo la derivada f'(x) se llama función derivada de f (o derivada primera) y la denotamos por f '.

Reiterando el proceso se obtienen las llamadas derivadas sucesivas de f.

La que ocupa el lugar n la denotamos por $f^{(n)}$.

Es importante que, en este apartado, además de las definiciones anteriores, se estudie o repase: la **interpretación geométrica y física de la derivada, las derivadas de las funciones elementales, las reglas de derivación, la relación con el crecimiento, máximos y mínimos relativos de la función, etc**.

2) FUNCIONES CONTINUAS Y DERIVABLES.

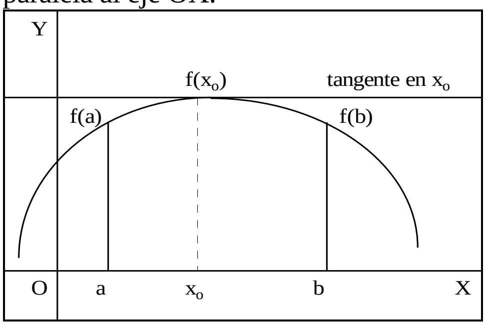
Teorema.- Si una función f tiene derivada finita en un punto x_o, es continua en x_o. No es cierto el recíproco. Demostración.- Ejercicio.

A continuación vemos tres teoremas importantes sobre las funciones continuas que, a la vez, sean derivables.

Supongamos que f es **continua en [a,b] y derivable en (a,b):** (según el teorema anterior, bastaría con exigir ser derivable, con derivada finita, en [a,b], y no hablar de continuidad, pero el teorema se cumple aunque no sea derivable en los extremos).

TEOREMA DE ROLLE.- Si f(a)=f(b) existe al menos un punto $x_o\in(a,b)$ tal que $f'(x_o)=0$.

Interpretación geométrica: Si los extremos de un arco continuo de curva con tangente en todos los puntos (derivable) tienen la misma ordenada, hay al menos un punto interior donde la tangente es paralela al eje OX.



Demostración: Según el teorema de Bolzano-Weierstrass existen en [a,b] dos puntos m y M donde f alcanza el mínimo y máximo absolutos, es decir, $f(m)\le f(x)\le f(M)$ para todo x de [a,b].

Si f es constante (f(m)=f(M)), en todos los puntos la derivada es 0, luego el teorema se cumple. En caso contrario, (f(m)<f(M)), alguno de los dos (o ambos) ha de ser interior al intervalo ya que si ambos están en los extremos sería f(m)=f(M) por ser f(a)=f(b). En el que sea interior la función

alcanza un mínimo o máximo relativo, es decir, f ' es 0.

Igual que en el teorema de Bolzano (y en todos los teoremas que estamos viendo), puede haber puntos donde f´ sea 0 y no se cumplan las condiciones del teorema ("cuando llueve las calles se mojan pero las calles pueden estar mojadas sin haber llovido" (Departamento de Filosofía)). Para los más torpes: de que no se cumplan las condiciones del teorema no puede deducirse que no hay algún punto donde se anule la derivada.

Supongamos que <u>f y g son dos funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b)</u>. Supongamos también que g' no se anula en (a,b) y que $g(a)\neq g(b)$.

En estas condiciones se cumple el siguiente

<u>**TEOREMA DE CAUCHY**</u>:

<u>**Existe al menos un punto x_o de (a,b) tal que**</u>: $\dfrac{f'(x_o)}{g'(x_o)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

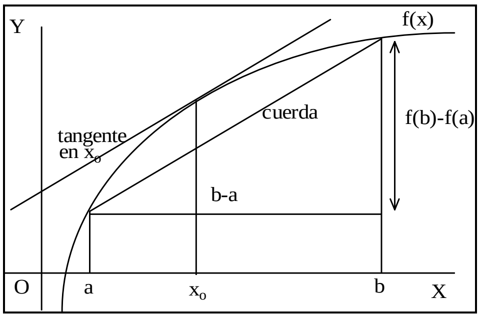
<u>Demostración</u>.- Consideramos la función h(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x), que es continua en [a,b] y derivable en (a,b) dado que f y g lo son. Por otro lado, se cumple h(a)=h(b).

Según el teorema de Rolle, existe al menos un punto x_o de (a,b) en el que h' es 0. Calculando $h'(x_o)$ e igualando a 0 resulta la igualdad a demostrar.

Como caso particular del teorema de Cauchy se tiene el siguiente teorema, también llamado "<u>**de los incrementos finitos**</u>" (muchos textos asignan este nombre al teorema de Cauchy), donde se supone que <u>f cumple las mismas condiciones que cumplía en los dos teoremas anteriores</u>:

<u>**TEOREMA DEL VALOR MEDIO (LAGRANGE):**</u>

Existe al menos un punto x_o de (a,b) en el cual $f'(x_o)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



<u>Interpretación geométrica</u>: Existe al menos un punto, interior a la curva, en el que la tangente a la misma es paralela a la cuerda que une sus extremos.

<u>Interpretación física</u>: Considerando f como función asociada a un movimiento, existe al menos un punto a lo largo de la trayectoria en el cual la velocidad instantánea coincide con la velocidad media de todo el recorrido.

<u>Demostración</u>: Tomando en el teorema de Cauchy g(x)=x.

Si la demostración se hubiese realizado por otra vía, el teorema de Rolle podría deducirse del teorema del valor medio. Por otro lado, muchos textos demuestran primero el teorema del valor medio y enuncian, a continuación, el teorema de Cauchy como una generalización del primero.

<u>Consecuencias inmediatas</u>:

En las condiciones del teorema,

1) Si f '(x)=0 para todo x de (a,b) entonces f es constante en [a,b].

2) Si f y g son tales que, para todo x de (a,b) es f '(x)=g'(x) existe un número real k tal que, para todo x de [a,b], f(x)=g(x)+k.

Análogamente, pueden deducirse el crecimiento, máximos, etc.

<u>3) DETERMINACIÓN DE LIMITES: REGLA DE L'HôPITAL</u>.

Ya conocemos el hecho de que si f y g son dos funciones tales que en un punto x_o tienen, respectivamente, por límite los números a y b, el límite del cociente es a/b, supuesto $b\neq 0$.

El problema se presenta cuando a=b=0, pues surge una indeterminación que, en algunos casos, se pudo resolver (cuando se puede simplificar la fracción). Ahora vamos a poder hacerlo de una forma más sencilla, además de poder hacerlo también en casos hasta ahora muy difíciles, cuando no imposibles.

En principio, la regla de L'Hôpital resuelve la indeterminación 0/0, cuando $x\to x_o$, pero también podremos utilizarla para otras indeterminaciones, como 0/0 cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$, ∞/∞, $0.\infty$, 0^0, etc.

Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de x_o tal que el límite de ambas en x_0 es 0 y que $g'\neq 0$ en ese entorno. No se exige la derivabilidad en x_o:

REGLA DE L'HôPITAL.- Si existe $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}$ y ambos coinciden.

No es cierto el reciproco, pues puede existir el límite de f/g y no existir el de f'/g'.

Demostración.- Consideremos las funciones

$F(x)=f(x)$ si $x\neq x_o$, 0 si $x=x_o$

$G(x)=g(x)$ si $x=x_o$, 0 si $x=x_o$

Ambas funciones son continuas en $[x_o,x]$ y derivables en (x_o,x) para cualquier x próximo a x_o (tal que (x_o,x) esté dentro del entorno en el que f y g son derivables).

Aplicando el teorema de Cauchy, al menos en un punto c de (x_o,x): $\frac{F'(c)}{G'(c)}=\frac{F(x)-F(x_o)}{G(x)-G(x_o)}$.

Como $F(x_o)=G(x_o)=0$ será $f(x)/g(x)=f'(c)/g'(c)$, con $g'(c)$ distinto de 0 por hipótesis y $g(x)$ también distinto de 0, pues si fuera $g(x)=0$ habría de ser $G(x)=G(x_o)=0$ con lo cual, aplicando el teorema de Rolle, existiría un punto de (x_o,x) en el cual G' sería 0 en contradicción con el hecho de que g' no se anula.

Cuando x tiende a x_o el punto c tiende también a x_o, ya que $x_o<c<x$ con lo cual demostramos que $f(x)/g(x)$ y $f'(x)/g'(x)$ tienen el mismo límite por la derecha en x_o.

Considerando el intervalo $[x,x_o]$ y siguiendo el mismo razonamiento se demuestra que también coincide el límite lateral por la izquierda.

Si f ' y g' son continuas en x_0, podríamos escribir : $\lim\limits_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$.

Observación importante.- Si al calcular el límite de $f'(x)/g'(x)$ se mantiene la indeterminación (o surge otra distinta), el proceso puede repetirse con f'' y g'' pues las condiciones de las funciones suelen conservarse.

Indeterminación ∞/∞.-Aunque no lo demostramos, sigue siendo válida la regla para esta situación.

Ejemplo 2.1: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-2x-1}{2x^2-3}=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x-2}{4x}=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Indeterminación 0.∞.- Se expresa f(x).g(x) de la forma g(x)/(1/f(x)) o como f(x)/(1/g(x)) que nos llevan al caso ∞/∞ ó 0/0.

Ejemplo 2.2: $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})=(\infty.0)=\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1/x^2}=(0/0)=.....=\infty$.

Indeterminación 0^0.- Se produce al calcular el límite de $f(x)^{g(x)}$ cuando el límite de ambas es 0. Se toman logaritmos neperianos con lo cual queda de la forma 0.∞.

Ejemplo 2.3: Designando con la letra M a $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4)^{(x-2)}$, que es de la forma 0^0, será:

$$\ln(M)=\lim_{x\to 2}(x-2)\ln(x^2-4)=(-0.\infty)=\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-4)}{1/(x-2)}=(-\infty/\infty)=.....=0.$$

es decir, ln(M)=0, luego M=1.

Indeterminaciones 1^∞ y ∞^0.- Como en el caso anterior, tomando logaritmos neperianos nos llevarán a la indeterminación ∞.0.

Ejemplo 2.4: Como en el caso anterior, si $N=\lim\limits_{x\to o}(x+1)^{(1/x)}$, de la forma 1^∞, entonces

$$\ln(N)=\lim_{x\to o}(1/x)\ln(1+x)=(\infty.0)=\lim_{x\to o}\frac{\ln(1+x)}{x}=(0/0)=\lim_{x\to o}\frac{1/(1+x)}{1}=1\Rightarrow N=e.$$

Tema 2: EJERCICIOS

2.1.- Repasando la derivación, calcula f ' para las funciones siguientes (entre otras muchas):
a) $f(x)=(1-x)/\sqrt{(2-x)}$ b) $f(x)=(x^2+1)^{4/3}$ c) $(x^2-1)^x$
d) $f(x)=\ln(x/(x^2-1))$ e) $f(x)=5^{sen(x)}$ f) $f(x)=(\ln(x))^{\ln(x)}$
g) $f(x)=\text{arctg}(\sqrt{x}/(x-1))$ h) $f(x)=\ln(\sqrt{(1+tg(x))/(1-tg(x))})$

2.2.- Utilizar la definición de derivada de una función en un punto para calcular la derivada de la función $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{1+x^2}\right)$ en x=0.

2.3.- Calcúlese f'(x) y f '(0) para las funciones:
$f(x)= x+1$ si $x<0$, 1 si $x\geq 0$
$g(x)= x^2$ si $x\geq 0$, $x/(x-1)$ si $x<0$

2.4.- Halla la ecuación de la recta tangente a la curva y=ln(x) en el punto x=e.

2.5.- Halla el punto donde la tangente a la curva $y=x^2-2x+3$ es perpendicular a la recta y=x.

2.6.- Dada $f(x)= x+2$ si $1\leq x<3$, $7-x$ si $3\leq x\leq 5$ ¿es aplicable el teorema de Rolle en [1,5]?.

2.7.- Dada la función $f(x)=x^3-18x$, comprueba que verifica las hipótesis del teorema de Rolle en $[0,3\sqrt{2}]$ y halla el punto, o puntos, de $(0,3\sqrt{2})$ donde f ' es 0.

2.8.- Si $f(x)=x^7-3x^6+sen(\pi x/2)$, ¿es cierto que la derivada de la función se anula en algún punto comprendido entre 0 y 1?. Enuncia el resultado teórico en el que se basa la respuesta.

2.9.- Comprobar que la ecuación $x^7+3x+3=0$ tiene una única solución real.

2.10.- Calcúlese el punto x_o cuya existencia afirma el teorema del valor medio para la función $f(x)=x^2-3x+4$ en [-2,3].

2.11.- Dada la función $f(x)=x^3-3x+m$, ¿para que valores de m se anula en [0,1] ?.

2.12.- ¿Se puede cumplir la afirmación del teorema de Rolle, Cauchy o valor medio sin que la función o funciones cumplan las condiciones que estos teoremas exigen?.

2.13.- Calcúlese el punto x_o cuya existencia afirma el teorema de Cauchy para las funciones $f(x)=x^3+1$, $g(x)=x^3-1$ en [2,4].

2.14.- Igual que el anterior para f(x)=1/x y $g(x)=x^2$ en [1,3]. ¿Podría hacerse en [-1,2]?.

2.15.- Dada la función $f(x)=(x^2-3)/2$ si $-1\leq x\leq 0$, $1/x$ si $-2\leq x\leq -1$, pruébese que cumple las condiciones del teorema del valor medio en [-2,0] y calcúlese el valor o valores de x donde se cumple.

2.16.- Demostrar que existe un punto de la curva $f(x)=e^x+\text{arctg}(x)$ en el cual la pendiente de la recta tangente es 3.

2.17.- Dada la parábola $f(x)=ax^2+bx+c$, demuestra que la cuerda que une los puntos de abscisa x_1 y x_2 es paralela a la tangente a la curva en el punto de abscisa $(x_1+x_2)/2$.

2.18.- Demuestra que el teorema del valor medio puede expresarse también de la forma $f(x+h)=f(x)+h.f'(x+\beta h)$ siendo $0<\beta<1$.

2.19.- La función $f(x) = 1- x^{2/3}$ cumple que f(1)=f(-1). ¿Existe algún punto de (-1,1) donde f ' =0 ?.

2.20.- Enunciar la regla de L´Hôpital y calcular $\lim_{x\to o}.\frac{x-\ln(1+x)}{(x+\ln(1+x))^2}$.

2.21.- Calcúlense los límites siguientes:

$$\lim_{x\to 2}.\frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2} \qquad \lim_{x\to o}.\frac{sen(x)-x}{x^3} \qquad \lim_{x\to 0}.\frac{1-\cos(x)}{e^x-1} \qquad \lim_{x\to o}.(sen(x))^{sen(x)}$$

$$\lim_{x\to o}.(\cos(x))^{(1/x)} \qquad \lim_{x\to\infty}.(x+e^x)^{1/x}$$

Tema 3

ESTUDIO DE FUNCIONES PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN

1) INTRODUCCIÓN.

Se pretende realizar el estudio de una función cualquiera dada en forma explícita hasta el punto que nos permita hacer una representación gráfica lo más precisa posible. Con ello veremos las aplicaciones de la derivada para conocer las características y puntos clave para la representación de las funciones.

También estudiaremos los llamados problemas de optimización.

2) ESTUDIO DE UNA FUNCIÓN (EN CARTESIANAS).

El estudio de una función comprende los puntos siguientes, cada uno de los cuales requiere de la correspondiente exposición teórica (por ejemplo el crecimiento, máximos y mínimos, etc). Lo que sigue es un resumen de resultados.

1) **Dominio o campo de existencia**.- Conjunto de valores de x para los cuales f(x) existe (f(x) es un número real, $\neq\infty$): Dom.f = $\{ x \in \mathbf{R} \mid f(x) \in \mathbf{R} \}$

Si f(x) se expresa como un cociente, no son del dominio los puntos donde se anule el denominador. Si se expresa como una raíz, aquellos que hagan negativo el radicando. Si se trata de un logaritmo, los que den como resultado de un número menor o igual que 0, etc, etc.

2) **Periodicidad**.- La función es periódica de período K cuando para todo x es f(x+K)=f(x).

Las funciones periódicas más conocidas son las trigonométricas.

La periodicidad supone que el estudio se puede reducir al tramo que se va repitiendo.

3) **Continuidad**.- El estudio de la continuidad, unido con el dominio, dará como resultado los puntos donde la gráfica "se corta" o no existe.

4) **Simetrías**.- También reduce la zona a estudiar el hecho de que la función sea simétrica.

Respecto del eje OY $\rightarrow$ Cuando f(x)=f(-x) para todo x.

Respecto del origen $\rightarrow$ Cuando f(x)=-f(-x) para todo x.

Las funciones simétricas respecto del eje OY también se denominan **funciones pares** (los exponentes pares son los que anular el signo -) y las simétricas respecto del origen **funciones impares** (exponentes impares conservan el -).

No puede darse la simetría respecto del eje OX. Tal representación no sería una verdadera función (aunque en algunos textos se las denomina funciones multiformes, como $f(x)=\pm\sqrt{x}$).

5) **Crecimiento y decrecimiento**.- Una función es creciente en aquellos puntos donde la derivada primera es mayor que 0 y decreciente en los que es menor que 0. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento presupone resolver una inecuación, no siempre fácil.

6) **Concavidad y convexidad**.- Se determinan los segmentos de concavidad y convexidad mediante la derivada segunda. En los puntos donde f''>0 la curva es cóncava (f' es creciente) y en los que f''<0 es convexa (f' decreciente).

Igual que el crecimiento, su estudio lleva consigo resolver una inecuación. Puede deducirse del estudio de los puntos del apartado siguiente:

7) **Máximos, mínimos y puntos de inflexión**. La forma de determinarlos es la siguiente:

Máximos y mínimos:

a.- Se resuelve la ecuación f'(x)=0. Supongamos que las raíces de esta ecuación son x_i (i=1,...,n). Estos serán los posibles máximos o mínimos.

b.- Se calcula, para cada raíz anterior, $f''(x_i)$. Si $f''(x_i)<0$ en el punto $x=x_i$ la función tiene un máximo. Si $f''(x_i)>0$, se trata de un mínimo. En el supuesto caso de que $f''(x_i)=0$, nada puede afirmarse, y habría que repetir el mismo cálculo con $f^{(3)}$ y $f^{(4)}$ y así sucesivamente.

Puntos de inflexión:

a.- Se resuelve la ecuación f''(x)=0. Sean x_i (i=1,...,n) las raíces de la misma. Estos serán los posibles puntos de inflexión.

b.- Para cada raíz anterior, si $f^{(3)}(x_i)\neq 0$, en $x=x_i$ la curva tiene un punto de inflexión. Nada puede afirmarse si $f^{(3)}(x_i)=0$; habría que recurrir al mismo estudio con $f^{(4)}$ y $f^{(5)}$ y así sucesivamente.

8) **Asíntotas**.- Son las rectas tangentes a la curva en el infinito. Distinguimos tres casos, aunque el último incluye al primero:

a) Paralelas al eje OX. Como el valor de la función f en el infinito es $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$, para que coincida con la recta y=k ha de ser $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ =k. Luego, si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = k$ ($\neq\infty$), entonces y=k es asíntota.

b) Paralelas al eje OY. Para que la recta x=k coincida con la función f en el infinito ha de ocurrir que al aproximarse la variable al valor k la función se haga infinito, es decir, si para un valor k finito $\lim\limits_{x\to k} f(x) = \pm\infty$, entonces x=k es una asíntota.

c) Oblicuas.- Como rectas que son, su ecuación será de la forma y=mx+n. Cuando m=0, estamos en el caso a).

Por ser tangente, la pendiente (m) será el valor de la derivada en el punto de tangencia (límite de f'(x) cuando $x\to\pm\infty$): $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x)$

También se puede expresar como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ (regla de L'Hopital).

Por otro lado, en el infinito han de coincidir el valor de la función y el de la recta, es decir,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} y = \lim_{x\to\pm\infty} (mx+n) = \lim_{x\to\pm\infty} (mx) + n \Rightarrow n = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right]$$

Asíntotas verticales puede haber muchas (incluso infinitas) pero de las otras como máximo hay 2: una por $+\infty$ y otra por $-\infty$ (que suelen coincidir).

Por otra parte, la curva no puede cortar a una asíntota vertical, pero sí puede hacerlo con una de las oblicuas.

Es de destacar que, en general, no es necesario realizar todos los cálculos para representar la función: hay datos que pueden deducirse de otros, como la concavidad si se tiene hecho el estudio del crecimiento y máximos y mínimos, etc.

El resumen anterior ha prescindido del estudio teórico, es decir, se ha reducido al cálculo práctico, pero **deben conocerse los conceptos teóricos con la suficiente precisión**, como ya se ha dicho antes.

No hay que olvidar los problemas de máximos y mínimos (optimización) que se incluyen en este tema. Este tipo de problemas se basan en encontrar la expresión de una función (que generalmente da la medida de una magnitud geométrica) y hallar el punto o puntos donde la función alcanza el máximo o mínimo valor.

Como solo sabemos hacer el cálculo con funciones de una sola variable, cuando la expresión a tratar contenga más de una, será necesario conocer la relación entre ellas para dejar solo una. Esta relación vendrá dada, directa o indirectamente, en el enunciado del problema.

Tema 3: EJERCICIOS

3.1.- Halla el dominio de las funciones:

a) $f(x) = \sqrt{(x-2)(x^3-9)}$ b) $f(x) = \ln(4-x^2)$ c) $f(x) = \sqrt{\ln(\text{sen}(x))}$

3.2.- Estudiar el crecimiento, máximos y mínimos, concavidad y puntos de inflexión de las funciones siguientes:

a) $f(x)=(1-\ln x)/x$ b) $f(x)=x.\ln(x^2)$ c) $f(x)=e^x(1+2x)$ d) $f(x)=(x^2+x+1)/e^x$
e) $f(x)=x^3e^x$ f) $f(x)=\cos(x)-\text{sen}(x)$ g) $f(x)=\ln(x^2+1)$ h) $f(x)=x^3/(x^2-1)$

3.3.- Determina las posibles asíntotas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = (x^2+3x-2)/(x+5)$ b) $f(x) = x^2/x^2+9$ c) $f(x) = x^3/(x^2-1)$

3.4.- Realiza el estudio completo, representación gráfica incluida, de las funciones que siguen:

a) $f(x) = x.\ln(x)$ b) $f(x) = (4x-5)/2(x^2-1)$ c) $f(x) = x^4 - 6x^2$
d) $f(x) = x^3/(x^2-1)$ e) $f(x) = \cos(x) - \cos^2(x)$ f) $f(x) = x/\ln(x)$
g) $f(x) = e^{2x}-2e^x$ h) $f(x) = x^2/(x^2-x-6)$

3.5.- Halla un punto de $f(x)=4-x^2$ en el que la tangente determine en el primer cuadrante, al cortarse con los ejes, un triángulo de área máxima.

3.6.- Halla la mínima distancia del punto (4,2) a la parábola de ecuación $y^2=8x$.

3.7.- Halla las dimensiones de un sector circular de perímetro 40 cm. y área máxima.

3.8.- De todos los triángulos isósceles de perímetro 1 metro, determina las medidas de aquel tenga área máxima.

3.9.- De todos los conos de generatriz 10 cm. halla el radio de la base de aquel que tenga la máxima capacidad.

3.10.- Sobre un pedestal de altura H se halla una estatua de altura h. ¿ A que distancia del pedestal se ve la estatua con un ángulo máximo?.

3.11.- Determina los vértices de un rectángulo inscrito en la elipse de ecuación $4x^2+9y^2=36$ para que su área sea máxima.

3.12.- De los cilindros que pueden inscribirse en una esfera de radio R, halla la altura de aquel que tenga máximo volumen.

3.13.- De todos los conos que pueden circunscribirse a una esfera de radio R, halla la altura y el radio de la base del que tenga la mínima superficie lateral.

3.14.- Halla las dimensiones del cilindro de máximo volumen que puede inscribirse en un cono de radio R y altura h.

Tema 4

INTEGRAL INDEFINIDA

1) PRIMITIVA DE UNA FUNCIÓN.

Suponemos que las funciones que se mencionan son continuas en un segmento [a,b], que puede ser todo R.

Definición.- Se llama **primitiva** de una función f a toda función F tal que $F'(x)=f(x)$ para todo x de [a,b].

Propiedades:

1.- F primitiva de f $\Rightarrow$ kF primitiva de kf (k constante).

2.- F primitiva de f y G primitiva de g $\Rightarrow$ F+G primitiva de f+g

Estas dos propiedades pueden englobarse en una sola:

F primitiva de f, G primitiva de g y h,k constantes $\Rightarrow$ hF+kG primitiva de hf+kg.

3.- **Teorema fundamental del Cálculo Integral**.- Si F y G son primitivas de f, difieren en una constante: F-G=Cte.

Demostraciones.- Las propiedades 1 y 2 se demuestran directamente a partir de la definición de primitiva.

Si F y G son primitivas de f, por definición, $F'(x)=G'(x)=f(x)$, luego $F'(x)-G'(x)=(F-G)'(x)=0$, es decir, F-G es constante.

2) INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA FUNCIÓN.

Definición.- Denominamos **integral indefinida** de una función f al conjunto de todas sus primitivas.

Según el teorema anterior, si F(x) es la expresión de una primitiva de f, otra cualquiera será de la forma F(x)+C siendo C una constante. En consecuencia, **podemos expresar la integral como F(x)+C**, siendo C una constante arbitraria (constante de integración). El problema de hallar la integral se resuelve, según esto, hallando una primitiva cualquiera.

La notación utilizada para la integral de la función f(x) es:

$$\int f(x)\,dx = \{\, F(x)+C \mid F'(x)=f(x),\ C\in R \}$$

Si se tienen en cuenta las propiedades de las primitivas, las propiedades de la integral son:

1.- $\int Kf(x)dx = K\int f(x)dx$ 2.- $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

es decir, el operador integral es lineal.

También es claro que $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

3) INTEGRALES INMEDIATAS.

Se denominan **inmediatas** a aquellas integrales que se obtienen simplemente recordando las derivadas inmediatas y las reglas de derivación, sobre todo la regla de la cadena.

En plan "recordatorio" a continuación se relacionan las más importantes:

1.- $\int x^n\,dx = x^{n+1}/(n+1) + C \ (n\neq -1)$ $\qquad \int f(x)^n f'(x)dx = f(x)^{n+1}/(n+1) + C \ (n\neq -1)$

2.- $\int (1/x)\,dx = \ln|x| + C$ $\qquad \int f'(x)/f(x)\,dx = \ln|f(x)| + C$

3.- $\int e^x\,dx = e^x + C$ $\qquad \int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + C$

4.- $\int a^x\,dx = a^x/\ln a + C$ $\qquad \int a^{f(x)} f'(x)dx = a^{f(x)}/\ln a + C$

5.- $\int \cos(x)dx = \mathrm{sen}(x) + C$ $\qquad \int f'(x)\cos(f(x))dx = \mathrm{sen}(f(x)) + C$

6.- $\int \mathrm{sen}(x)dx = -\cos(x) + C$ $\qquad \int f'(x)\mathrm{sen}(f(x))dx = -\cos(f(x)) + C$

7.- $\int 1/\cos^2(x)dx = \mathrm{tg}(x) + C$ $\qquad \int f'(x)/\cos^2(f(x))dx = \mathrm{tg}(f(x)) + C$

8.- $\int 1/\text{sen}^2(x)dx = -\text{ctg}(x) + C$ $\quad\quad$ $\int f'(x)/\text{sen}^2(f(x))dx = -\text{ctg}(f(x)) + C$

9.- $\int 1/(1+x^2)dx = \text{artg}(x) + C$ $\quad\quad$ $\int f'(x)/(1+f(x)^2)dx = \text{artg}(f(x)) + C$

10.- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{ar}\,\text{sen}(x) + C$ $\quad\quad$ $\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f(x)^2}}dx = \text{ar}\,\text{sen}(f(x)) + C$

En la número 4 se supone a>0 y a≠1. En la número 8 ha de ser f(x) ≠ π/2+kπ (k entero). En la 10 se supone -1<f(x)<1.

No se han mencionado las funciones trigonométricas hiperbólicas.

4) INTEGRALES REDUCIBLES A INMEDIATAS.

Son aquellas que, no siendo inmediatas, pueden convertirse en inmediatas con transformaciones simples, como multiplicaciones y divisiones por números, sumar y restar un mismo número, "partir" la fracción en dos o más o dividir si el numerador es de igual o mayor grado que el denominador, si se trata de funciones racionales, etc.

Antes de pensar en el método de integración a utilizar, se debe verificar si la integral es reducible a inmediata utilizando estos procedimientos.

Evidentemente, la mayoría de las integrales que se nos presenten no serán de este tipo, es decir, necesitaremos un "método" para hallar una primitiva. Precisamente, lo que haremos a continuación es estudiar los principales métodos, los más generales, que son los que nos permitirán calcular una primitiva para las funciones también más generales.

¿Con ellos podremos hallar una primitiva de cualquier función?.¡ Ni mucho menos!. De todos modos, serán suficientes para nuestros propósitos.

5) MÉTODOS DE INTEGRACIÓN.

Son los procedimientos operativos a seguir para encontrar una primitiva de una función dada, o lo que es lo mismo, transformar una integral no inmediata en otra (u otras) inmediatas.

Frecuentemente la aplicación de un método hay que hacerla más de una vez. Incluso, puede ser necesaria la utilización sucesiva de más de un método hasta llegar al final.

5.1) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN (CAMBIO DE VARIABLE).

Como su nombre indica, **se trata de hacer un cambio de variable en el integrando** de forma que la expresión obtenida con la nueva variable sea inmediata o, al menos, más sencilla que la dada.

Si se realiza el cambio de variable x=g(z), con lo cual dx=g'(z)dz, resulta:

$$\int f(x)dx = \int f(g(z))g'(z)dz$$

Si la integral del segundo miembro (con la nueva variable z) resulta inmediata o más sencilla que la del primero, la sustitución ha sido buena. Una vez determinada la integral, se deshace el cambio poniendo de nuevo la x como variable: $z=g^{-1}(x)$. Por tanto, es necesario que la función g utilizada tenga inversa.

Si, por lo contrario, la nueva integral es más complicada, o similar, a la dada, el cambio ha sido desafortunado. Tendremos que pensar en otro posible cambio o, tal vez, en otro método.

En definitiva, **la clave de la cuestión está en acertar con la parte del integrando que llamaremos z** para que la integral se simplifique.

Evidentemente, esto no siempre es posible. Incluso, siendo posible, muchas veces resulta difícil acertar cuando no se tiene mucha práctica o el cambio es muy extraño (que los hay). Por otra parte, téngase en cuenta que lo que se persigue es una integral que sea más sencilla que la dada, aunque no sea inmediata (si lo es, mucho mejor), y por tanto, para concluir, puede ser necesario volver a hacer otro cambio o, incluso, utilizar otro método.

Ejemplo 4.1.- El cambio x=sen(z), dx=cos(z)dz, permite resolver la integral siguiente:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\text{sen}^2(z)}\cos(z)dz = \int \cos(z)\cos(z)dz = \int \cos^2(z)dz$$

La integral así obtenida no es inmediata, pero es mas sencilla que la dada al principio. Se resuelve utilizando la fórmula de trigonometría cos(2z)=1-2cos²(z), de la cual se obtiene cos²(z)=(1+cos(z))/2 con lo que se transforma en suma de dos inmediatas. Al final hay que tener en cuenta que z=arsen(x).

5.2) MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

Si u y v son dos funciones derivables y consideramos la función producto uv, al diferenciar se tiene: d(uv) = du.v + u.dv

Integrando los dos miembros de la igualdad

$$uv = \int v.du + \int u.dv \quad \text{de donde} \quad \boldsymbol{\int u.dv = uv - \int v.du}$$

que es la llamada "**fórmula de integración por partes**".

El denotar en esta fórmula a las funciones con las letras u y v (en lugar de f y g como se hace habitualmente) es costumbre universalmente adoptada (¿..?). No hay problema con utilizar otras.

Se trata de llamar **u** a una parte del integrando (que no contenga a dx, pues es una función) y **dv** al resto (que contendrá a dx, pues es una diferencial). De las dos igualdades anteriores se podrá determinar (diferenciando e integrando respectivamente) **du** y **v**. A continuación se utiliza la fórmula anterior con lo que la integral dada quedará expresada como uv- $\int$ v.du.

Si esta segunda integral es más sencilla que la dada, hemos avanzado; si ocurre lo contrario, intentaremos otra posibilidad para u y dv o, tal vez, otro método.

Ocurre a veces que, al volver a aplicar el método a la integral que resulta en el segundo miembro, aparece de nuevo la dada cambiada de signo (la integral "*se muerde la cola*"). Si esto es así, puede despejarse de la igualdad resultante. Por ejemplo, al integrar e^x.sen(x).

Ejemplo 4.2.- Sea la integral $\int x.e^x\,dx$. Si hacemos u=x y dv=e^xdx (de donde, respectivamente, du=dx y v=e^x) y aplicamos la fórmula:

$$\int x.e^x.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du = x.e^x - \int e^x.dx = x.e^x - e^x + C.$$

Otra posibilidad es hacer u=e^x y v=xdx (de donde sería du=e^xdx y v=x²/2) con lo cual:

$$\int x.e^x.dx = \int u.dv = u.v - \int v.du = e^x.x^2/2 - \int e^x.(x^2/2)dx$$

pero, en este caso, la integral que resulta en el segundo miembro es más complicada que la dada, luego no sirve.

5.3) INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.

Cuando se trata de integrar cocientes de polinomios observaremos previamente dos cosas:

1.- **Que el grado del numerador sea menor que el del denominador**. Si no es así, se divide, expresando la fracción como cociente mas resto partido por divisor. La integral del cociente será inmediata.

2.- **Que el numerador no sea la derivada (o "casi") del denominador**, dado que en este caso la integral, o parte de ella, sería inmediata.

Supongamos un cociente de polinomios de coeficientes reales p(x)/q(x), que si grado(p)=m y grado(q)=n es m<n, que no hay factores comunes entre ambos (la fracción no es simplificable) y que hay poca relación entre q'(x) y p(x).

El procedimiento para integrar estas fracciones consiste en descomponerlas en suma de fracciones simples. Como esta descomposición se realiza en función de la descomposición del denominador, se pueden presentar estos casos:

A) El denominador tiene n raíces reales simples: $q(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)....(x-x_n)$

En este caso, olvidándonos del coeficiente a_n (que sería una constante y saldría fuera de la integral), la fracción puede descomponerse en la forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \frac{A_3}{x-x_3} + ... + \frac{A_n}{x-x_n}$$

donde los A_i son números reales obtenibles, de forma única, sumando las fracciones del segundo miembro e identificando p(x) con el numerador de la fracción que resulte (método de los coeficientes indeterminados).

La integral quedará descompuesta en suma de n integrales, todas ellas inmediatas:

$$\int \frac{A_i}{x-x_i}dx = A_i \ln|x-x_i| + C$$

B) Alguna de las raíces reales del denominador es múltiple.

Si una, o varias, de las raíces, x_i, está repetida k veces, la parte de la descomposición correspondiente a la misma sería de la forma:

$$\frac{A_1}{x-x_i}+\frac{A_2}{(x-x_i)^2}+\frac{A_3}{(x-x_i)^3}+.....+\frac{A_n}{(x-x_i)^k}$$

donde los A_i son números reales, que se obtienen como en el caso anterior, y las integrales correspondientes a estos sumandos también son inmediatas (potencias).

C) En el denominador hay raíces complejas.

Si al descomponer el denominador resultan factores de grado superior a la unidad, es decir, hay 2,4,6... raíces complejas (recordemos que el número de raíces complejas es par, pues si existe una también su conjugada), la cuestión se complica. Solo vamos a poder resolver el caso de dos raíces complejas, es decir, factores de grado 2.

El sumando correspondiente a este factor seria de la forma: $\dfrac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$

Su integración (supuesto que el numerador no sea la derivada del denominador, en cuyo caso es inmediata) se realiza descomponiendo el numerador en dos partes: la primera, la derivada del denominador o un múltiplo; la segunda la constante restante. A continuación se descompone la fracción en suma de dos, cuyos numeradores son los sumandos anteriores. La primera de las cuales se reducirá al logaritmo neperiano y la segunda, "completando el cuadrado" en el denominador para que quede de la forma $(h(x))^2+1$, conduce al arctg.

D) Situación general.- Si la fracción a integrar, hecha la descomposición del denominador, resulta ser: $\dfrac{2x^2-3x+1}{(x-1)(x+2)^2(x^2+x+1)}$, que recoge los tres casos anteriores, la descomposición será de la forma siguiente: $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+2}+\dfrac{C}{(x+2)^2}+\dfrac{Dx+E}{(x^2+x+1)}$, donde A,B,C,D y E son números reales a determinar (identificando el numerador que resulta al sumarlas con $2x^2-3x+1$).

Al integrar, las dos primeras son inmediatas (logaritmos), la tercera también es inmediata (es una potencia) y la cuarta, salvo que Dx+E sea la derivada exacta de x^2+x+1 (es decir, 2x+1) se descompone en suma de dos: la primera de ellas reducible a $(2x+1)/(x^2+x+1)$ multiplicando por un número, y la segunda de la forma $1/(x^2+x+1)$, reducible al arc.tg teniendo en cuenta la igualdad $x^2+x+1 = x^2+x+(1/4)+(3/4) = (x+(1/2))^2 + (1/4)$.

5.4) INTEGRACIÓN DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

A) Integrales de la forma $sen^n(x).cos^m(x)$ dx con n,m enteros.

Según los valores de n y m pueden presentarse las situaciones siguientes:

a) n=1 o m=1. En este caso la integral es inmediata.
b) n impar y m par. Con el cambio cos(x)=z y poniendo los senos en función del coseno.
c) n par y m impar. Como antes: sen(x)=z y se ponen los cosenos en función del seno.
d) n y m son impares. Se puede hacer el cambio del apartado b o el cambio del c.
e) n y m son pares. Utilizando las fórmulas del ángulo doble.

B) Integrales que son funciones racionales de las funciones trigonométricas: En estos casos uno de los cambios más utilizados es hacer $tg(x/2)=z, dx=2dz/(1+z^2)$, de donde se deduce que $sen(x)=2z/(z^2+1)$, y $cos(x)=(1-z^2)/(1+z^2)$. Con este cambio la expresión será racional en z, es decir, del tipo estudiado en el punto 5.3 anterior.

Tema 4: EJERCICIOS

A continuación se presenta un conjunto de funciones para las cuales hay que encontrar una primitiva. Para las dadas en el grupo final no se indica el método a seguir, siendo, por tanto, el grupo más interesante.

A) Casi inmediatas o sustitución adecuada.

5.1.- $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 5.2.- $\frac{1}{x^2+7}$ 5.3.- $\frac{1}{\sqrt{8-x^2}}$ 5.4.- $tg^2(x)$

5.5.- $3^x e^x$ 5.6.- $\frac{k}{k-x}$ 5.7.- $\frac{x^2+5x+7}{x+3}$ 5.8.- $\frac{x}{(1+x)^2}$

5.9.- $\frac{1}{3x^2+5}$ 5.10.- $\frac{x^3}{k^2-x^2}$ 5.11.- $\frac{1}{\sqrt{7+8x^2}}$ 5.12.- $\frac{x^2}{1+x^6}$

5.13.- 4^{2-3x} 5.14.- $\frac{1}{2^x+3}$ 5.15.- $\cos(x/\sqrt{2})$ 5.16.- $sen^2(x)$

5.17.- $\frac{x}{\cos^2(x^2)}$ 5.18.- $\frac{tg\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ 5.19.- $\frac{x}{e^{2x}}$ 5.20.- $\frac{x^2}{x^2-2}$

5.21.- $\frac{1}{\cos(x/k)}$ 5.22.- $\frac{1}{x\ln^2(x)}$ 5.23.- $\frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$ 5.24.- $\frac{x}{1+\sqrt{x}}$

5.25.- $1/\sqrt{e^x-1}$ 5.26.- $\frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}$ 5.27.- $x(2x+5)^{10}$ 5.28.- $\frac{1}{x\ln(x)}$

5.29.- $\sqrt{x^2-k^2}\,/\,x$ 5.30.- $x^3\sqrt{x^2-k^2}$ 5.31.- $x\ln\sqrt{1+x^2}$ 5.32.- $\frac{sen^3(x)}{\sqrt{\cos(x)}}$

5.33.- $\frac{\cos(2x)}{4+\cos(2x)}$ 5.34.- $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$ 5.35.- $\frac{x}{1+x^4}$ 5.36.- $\sec^2(x)$

B) Método de integración por partes.

5.37.- $\ln(x)$ 5.38.- $arctg(x)$ 5.39.- $arcsen(x)$ 5.40.- $x\,sen(x)$
5.41.- $x\cos(3x)$ 5.42.- $x2^{-x}$ 5.43.- x/e^x 5.44.- $x\ln(x)$
5.45.- $x^2\ln(x)$ 5.46.- x^2e^{3x} 5.47.- $\ln(x)/x^3$ 5.48.- $x\,arcsen(x)$
5.49.- $\ln^2(x)$ 5.50.- $sen(\ln(x))$ 5.51.- $x/\cos^2(x)$

C) Integración de funciones racionales.

5.52.- $\frac{1}{(x^2-1)^2}$ 5.53.- $\frac{x^3-1}{4x^2-x}$ 5.54.- $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$ 5.55.- $\frac{1}{x(x+1)^2}$

5.56.- $\frac{2x-1}{x^3+x^2-x}$ 5.57.- $\frac{2x+5}{x^2+x+1}$ 5.58.- $\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}$

D) Integración de funciones trigonométricas.

5.59.- $sen(2x).\cos(3x)$ 5.60.- $\frac{sen^3(x)}{\cos^2(x)}$ 5.61.- $\cos^2(5x)$ 5.62.- $\frac{sen(x)}{1+tg^2(x)}$

5.63.- $\text{sen}^2(x)\cos^4(x)$ 5.64.- $\dfrac{\text{sen}(x)}{1-\text{sen}(x)}$ 5.65.- $\cos^6(3x)$ 5.66.- $\dfrac{1}{\text{sen}^5(x)}$

5.67.- $\dfrac{1+\text{tg}(x)}{1-\text{tg}(x)}$ 5.68.- $\dfrac{1}{1+\text{sen}(x)-\cos(x)}$ 5.69.- $\dfrac{1-\text{sen}(x)+\cos(x)}{1+\text{sen}(x)-\cos(x)}$

E) ¡ Cualquiera sabe....!

5.70.- $\dfrac{1}{x(x^2+5)}$ 5.71.- $\dfrac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}$ 5.72.- $\dfrac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}$ 5.73.- $\sqrt{x^2-9}$

5.74.- $\dfrac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}$ 5.75.- $x\ln(1-x)$ 5.76.- $\cos(\ln(2x))$ 5.77.- $\dfrac{1}{2+3\cos^2(x)}$

5.78.- $\ln(1/x)$ 5.79.- $\dfrac{e^x}{1+e^x}$ 5.80.- $\dfrac{x^2}{x^3+x^2-2x}$ 5.81.- $\dfrac{x\,\text{arctg}(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

5.82.- $x^2\text{arctg}(x)$ 5.83.- $\cos^3(x)/\text{sen}(x)$ 5.84.- $\dfrac{e^{3x}-e^x}{e^{2x}+1}$ 5.85.- $\cos^5(2x)$

5.86.- $\dfrac{4^x+5\cdot 16^x}{1+16^x}$ 5.87.- $x\ln(x)$ (UEX,93) 5.88.- $\dfrac{1+\ln^3 x}{x(\ln^2 x-\ln x)}$ 5.88.- $\dfrac{3^x+27^x}{1+9^x}$

5.89.- $x\ln(1+x^2)$ 5.90.- $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$ (UEX,95)

Tema 5

INTEGRAL DEFINIDA

1) INTRODUCCIÓN.

El problema central es el cálculo del área del recinto plano delimitado por una función f, el eje OX y las rectas x=a y x=b.

Resuelto ese problema, se generaliza al cálculo de áreas de recintos planos, volúmenes de cuerpos regulares y de revolución y longitudes de líneas, sin olvidarnos de otras aplicaciones, sobre todo las referidas a la Física.

2) DEFINICIÓN DE INTEGRAL DEFINIDA.

En lo sucesivo supondremos que f es una función continua en un intervalo cerrado [a,b] y que $f(x)\geq 0$ para todo x de [a,b].

Sea A el área comprendida entre f, el eje OX y las rectas x=a y x=b.

Definición de partición de [a,b].- Una **partición P de orden n** del segmento [a,b] es una división del mismo en n partes (no necesariamente iguales).

Es claro que existen infinitas particiones de orden n (n>1).

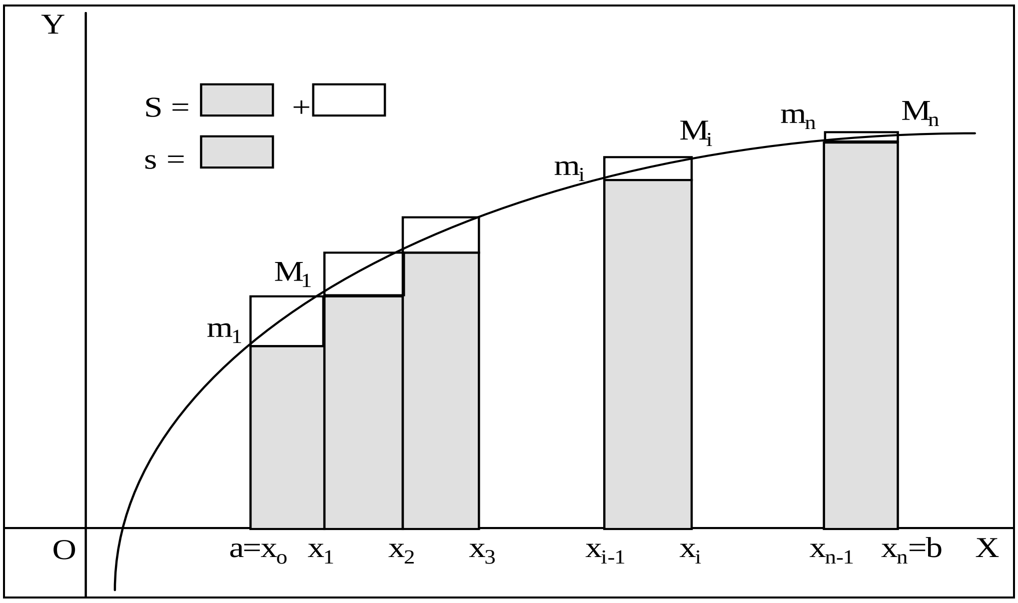
Supongamos que $a=x_o,x_1,x_2,...,x_{n-1},x_n=b$ una de las posibles, es decir

$$[a,b] = [x_0,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup ..... \cup [x_{n-1},x_n]$$

Sean m_i y M_i, respectivamente, el mínimo y máximo absolutos de f en $[x_{i-1},x_i]$ (existencia asegurada por el teorema de Weierstrass).

El número $s = \Sigma\, m_i(x_i-x_{i-1})$ representa la suma de áreas de los rectángulos "interiores" a la curva.

Por otro lado, $S = \Sigma\, M_i(x_i-x_{i-1})$ representa la suma de áreas de rectángulos "exteriores".



Entonces, resulta evidente (véase la figura) que $s \leq A \leq S$, es decir, s y S son aproximaciones de A por defecto y exceso respectivamente.

Otra cuestión clara: Si en la partición anterior hacemos nuevas divisiones en alguno de los segmentos $[x_i,x_{i-1}]$ (o en todos), es decir, obtenemos una partición de orden superior, las sumas correspondientes, s' y S' cumplen que $s \leq s' \leq A \leq S' \leq S$. Nos hemos aproximado más al valor del área (tanto por defecto como por exceso).

Podemos afirmar, en consecuencia, que **al aumentar el número de divisiones (disminuyendo, por tanto, su longitud) las sumas interiores y exteriores se aproximan al área buscada A**.

Todas las posibles sumas {s} y {S} (las correspondientes a todas las posibles divisiones) son conjuntos acotados: En efecto, si son m y M el mínimo y máximos absolutos de f en [a,b], será

$$m(b-a) \leq s \leq A \leq S \leq M(b-a)$$

para cualesquiera s de {s} y S de {S}.

Como conjuntos acotados, {s} tendrá un supremo y {S} un ínfimo, que denotaremos por sup{s} y por inf{S}. Estos dos valores cumplirán (aunque f no sea continua, basta con que sea acotada) sup{s}≤ A≤ inf{S}, y se denominan **integrales de Riemann** de la función f (inferior y superior respectivamente). Podríamos poner sup{s}= $\lim\limits_{n\to\infty} \sum m_i(x_i-x_{i-1})$ y inf{S}= $\lim\limits_{n\to\infty} \sum M_i(x_i-x_{i-1})$. **Si coinciden, se dice que f es integrable.**

Teorema: **Si f es continua en [a,b] sup{s}=inf{S}, es decir, es integrable**.

Demostración.- Basta con demostrar que la diferencia S-s se puede hacer tan pequeña como queramos.

En efecto: $S-s = \sum M_i(x_i-x_{i-1}) - \sum m_i(x_i-x_{i-1}) = \sum (M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$

y como las diferencias M_i-m_i se pueden hacer todas menores que un ε dado (por ser f continua y tomando las divisiones lo pequeñas que sea necesario), se tendrá S-s < ε(b-a).

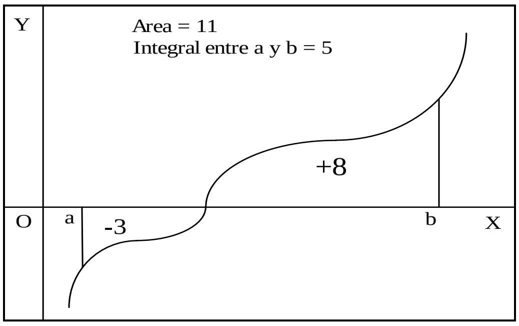
Definición.- Se denomina integral de Riemann o integral definida de la función f en el intervalo [a,b] al valor común anterior.

Convencionalmente se representa como y se lee "**integral entre a y b de f de x diferencial de x**".

Los valores a y b se llaman extremos de integración (inferior y superior, respectivamente).

Nota 1.-También cumplen el teorema precedente, entre otras, las funciones monótonas y las funciones escalonadas. Cuando no se cumple solo puede hablarse de integrales inferior y superior.

Nota 2.- Obsérvese que si f fuese tal que f(x)≤0 para todo x de [a,b] se intercambiarían las nociones de suma interior y exterior para cada partición. Además, las sumas serian todas negativas.



Nota 3.- Finalmente, téngase en cuenta que si en (a,b) la función tiene algún cero (hay tramos donde es positiva y otros donde es negativa) el concepto de integral sigue siendo válido, pero ésta no coincide con el área A. Para calcular el área tendríamos que dividir el segmento [a,b] en partes donde f es positiva y partes donde es negativa para, al final, sumar todas las áreas obtenidas en valor absoluto. Equivale a tomar |f | en todo [a,b].

Un ejemplo de Física.- Cuando f representa el valor de una fuerza aplicada a un objeto en función del espacio o desplazamiento realizado, la integral definida de f(s) entre a y b representa el trabajo realizado por la fuerza al trasladar el objeto desde el punto a hasta el b. Obsérvese que, cuando la fuerza no es constante a lo largo de la trayectoria, el trabajo se calcula de forma análoga al área: sumando infinitos trabajos "muy pequeños".

3) PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA.

Las cuatro primeras propiedades que siguen no necesitan demostración, se deducen directamente de la definición.

1.- Signo: $\int_a^b f(x)dx \begin{cases} >0 & \text{si} \quad f(x)>0 \quad \text{para todo} \quad x\in[a,b] \\ <0 & \text{si} \quad f(x)<0 \quad \text{para todo} \quad x\in[a,b] \end{cases}$

2.- Si se permutan los extremos la integral cambia de signo: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. De esto se deduce que $\int_a^a f(x)dx = 0$, también deducible a partir de la definición.

3.- Si a<c<b entonces: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

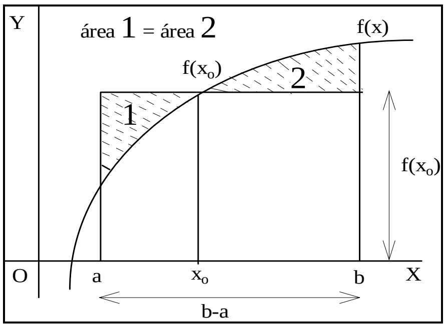
4.- Para f,g integrables en [a,b] y k un número real cualquiera:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b [kf(x)]dx = k\int_a^b f(x)dx$$

5.- **Teorema del valor medio (del cálculo integral)**.- Si f es continua en [a,b] (y por tanto integrable), **existe al menos un punto $x_o \in (a,b)$ tal que** $\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx = f(x_o)(b-a)}$.

A $f(x_o)$ se le llama **valor medio** de f en [a,b].

Interpretación geométrica.- Si f es siempre negativa o siempre positiva, existe al menos un punto x_o de (a,b) tal que el área A equivale al área del rectángulo de lados los segmentos [a,b] y $f(x_o)$.



Demostración.- Como $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$, resulta

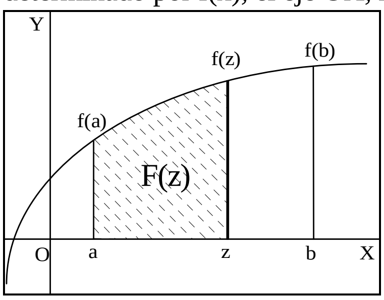
$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$, siendo m y M el mínimo y máximo absolutos de f en [a,b].

De acuerdo con el teorema de los valores intermedios, existirá al menos un punto $x_o \in (a,b)$ tal que $f(x_o) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, que es la igualdad a demostrar.

Si f no es continua, la existencia de este punto no está asegurada, pero sí lo está la de un número k entre m y M tal que la integral coincide con k(b-a).

4) FUNCIÓN INTEGRAL.

Sea F la función definida al considerar como variable uno de los extremos de la integral (por ejemplo, el b): $\mathbf{F(z) = \int_a^z f(x)dx}$. El valor que toma en un punto z equivale al área del recinto determinado por f(x), el eje OX, la recta x=a y la recta variable x=z (a≤z≤b).



A esta función la denominamos **función integral** definida o función área asociada a f en [a,b]. La relación entre F y f puede apreciarse en la figura. Es claro que F(a)=0 y que F(b) es el área A tantas veces citada.

Con el ejemplo de Física.- En el ejemplo anteriormente citado, la función integral del trabajo T(z) (integral entre a y z de f(s)ds) nos dará, para cada valor z del espacio recorrido, el trabajo hasta ese momento realizado.

Teorema fundamental del Cálculo Integral.- La función integral F asociada a f en [a,b] es derivable y su derivada coincide con f en [a,b] (F es primitiva de f).

Demostración.- Calculemos su derivada en un punto cualquiera $z \in [a,b]$ utilizando la definición:

$$F'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{z+h} f(x)dx - \int_a^z f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_z^{z+h} f(x)dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_o)h}{h} = f(z)$$

Se ha aplicado el teorema del valor medio en [z,z+h] y se ha tenido en cuenta que el punto x_o es tal que $z<x_o<z+h$ por lo que, cuando h tiende a 0, él tiende a z.

5) REGLA DE BARROW.

La obtención de una integral definida, a partir del cálculo del límite o de una suma infinita, puede realizarse para casos muy sencillos, pero la operación es compleja con funciones más generales.

La regla siguiente nos permite obtener la integral definida calculando una primitiva de la función. A pesar de que hallar una primitiva también nos puede plantear problemas, estos serán mucho más asequibles supuesto el conocimiento de los métodos de integración más generales.

REGLA DE BARROW:

Si G es una primitiva cualquiera de f entonces: $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$

Por convenio de notación vamos a poner $G(b) - G(a) = \left[G(x)\right]_a^b$

Demostración.- Según hemos visto, la función integral F(z) también es primitiva de f, luego difiere de G en una constante: F(z)-G(z)=C. Lo anterior equivale a decir que $\displaystyle\int_a^z f(x)dx - G(z) = C$.

De la igualdad anterior se deduce que C= -G(a) y que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = G(b) + C$ (considerando z=a y z=b). La unión de ambas es la igualdad a demostrar.

Observación sobre el cambio de variable.- En el cálculo de una integral definida se necesita una primitiva de la función f. Cuando su cálculo se realice por el método de sustitución, se pueden seguir dos caminos:

1.- Olvidarnos de la integral definida y calcular, independientemente, la indefinida utilizando las sustituciones necesarias. Luego se ‘deshacen’ todos los cambios y, expresada la primitiva en función de x, se aplica la regla de Barrow.

2.- Seguir el cálculo con la integral definida de forma que, al hacer cualquier cambio de variable, también se cambien los extremos de la integración a los valores correspondientes de la nueva. Este camino es bastante útil pues ahorra el "deshacer" los cambios.

Así, si se hace el cambio x=g(z): $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(z))g'(z)dz$

6) INTEGRALES IMPROPIAS.

Una integral definida recibe el apelativo de "impropia" **cuando alguno de los extremos de integración (o ambos) es ∞**.

Si existe el límite (no ∞) de la función integral correspondiente, estas integrales se definen como el valor del límite, y se denominan impropias convergentes:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{z\to\infty}\int_a^z f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{z\to-\infty}\int_z^b f(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{z\to\infty \\ t\to-\infty}}\int_t^z f(x)dx$$

En el caso de no existir tal límite (o ser ∞) se llaman impropias divergentes y no podemos asociarle ningún número real como valor.

Ejemplo.- $$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{z\to\infty}\int_1^z \frac{1}{x^2}dx = \lim_{z\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right]_1^z = \lim_{z\to\infty}\left(\frac{-1}{z} - (-1)\right) = 1$$

También reciben el nombre de impropias aquellas integrales definidas tales que la función no está acotada en algún extremo, como la integral de $1/x^2$ entre 0 y 1, pues la función no está acotada en a=0. En este caso, si para todo ε positivo tal que a+ε<b la función es integrable en [a+ε,b], se define la integral como el límite siguiente, supuesta su existencia: $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$

Lo mismo si el problema está en el extremo b.

En consecuencia, no todas las integrales llamadas impropias se corresponden con un valor numérico. Todo depende de la existencia de los límites antes mencionados.

Este tipo de integrales a veces nos depara alguna sorpresa: hay recintos que nos parecen ilimitados y, al calcular la integral, resulta un área bastante más pequeña de lo esperado.

Este es el caso de la integral de $1/(1+x^2)$ entre $-\infty$ y ∞ cuyo valor es π (calcúlese).

Tema 6: EJERCICIOS

5.1.- Calcula, como un límite, el área del recinto comprendido entre la función f(x)=x+1, el eje OX y las rectas x=1,x=4.

5.2.- Calcula, como un límite, el área del recinto comprendido entre la función $f(x)=x^2$, el eje OX y las rectas x=0,x=4.

5.3.- Calcula, utilizando la regla de Barrow, las integrales definidas siguientes:

$$\int_3^4 \sqrt{x-2}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} \qquad \int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2} \qquad \int_0^{\pi/4} tg(x)dx \qquad \int_0^{\pi/4} sec^2(x)dx \qquad \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

5.4.- Calcula el valor de las integrales impropias siguientes, en el caso de que sean convergentes:

$$\int_1^{\infty} \ln(x)dx \qquad \int_0^{\infty} \frac{1}{e^x}dx \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x}dx \qquad \int_0^{1} \ln(x)dx \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{2x}dx \qquad \int_0^{1} \frac{1}{x}dx$$

5.5.- Halla el valor medio de la función f(x)=1+2cos(x) en [-π,π].

5.6.- Calcula el valor medio de la función $f(x)=sen^2(x)$ en [0,π].

5.7.- Halla F´(1) para la función $F(z)=\int_0^z xe^x dx$.

Tema 6

CALCULO INTEGRAL

(Aplicaciones)

0) INTRODUCCIÓN.

En este tema veremos las aplicaciones más importantes del Cálculo Integral. Se refieren al cálculo de:

a) Área de recintos planos.
b) Volumen de cuerpos de revolución y otros cuerpos.
c) Superficie de cuerpos de revolución.
d) Longitud de arcos de curva.

También puede considerarse alguna aplicación a la Física, como el cálculo de centros de gravedad y de momentos de inercia.

1) ÁREA DE RECINTOS PLANOS.

Precisamente hemos introducido el concepto de integral tratando de calcular el área de recintos de este tipo.

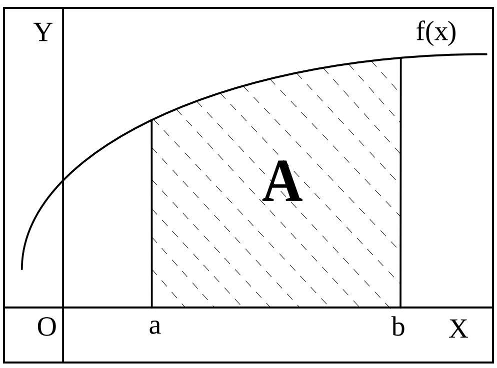
A) Área de la zona determinada por una función continua, el eje OX y las rectas x=a, x=b. Para su cálculo pueden presentarse las dos situaciones siguientes:

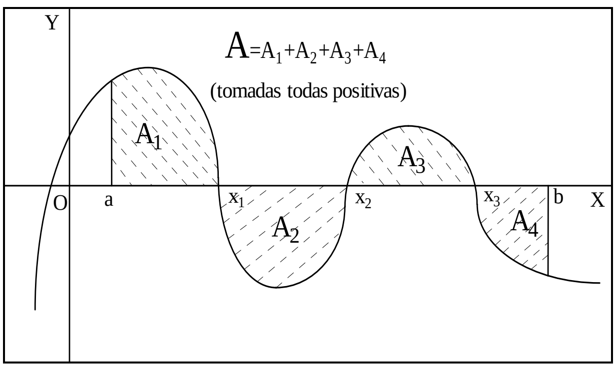
1) ***La función es siempre positiva o siempre negativa en [a,b]***. En este caso, recordando el tema anterior, el área vendrá dada por: $\mathbf{A} = \left| \int_a^b \mathbf{f(x)dx} \right|$

Se toma valor absoluto dado que la integral tomará un valor negativo cuando lo sea f.

2) ***En [a,b] la función f cambia de signo una o varias veces***. En este caso hay que determinar los puntos x_i donde $f(x_i)=0$ y dividir el segmento [a,b] por esos puntos. Se calculan las áreas correspondientes a cada uno de ellos y se suman todas.

Representación de las dos situaciones:





B) Área del recinto comprendido entre dos funciones continuas y las rectas x=a y x=b.

Si son f y g las dos funciones, podemos suponer que f(x) y g(x) no se cortan en [a,b] (Si f y g se cortasen entre en (a,b) dividiríamos el segmento por esos puntos de corte y haríamos el cálculo para cada uno de ellos. En este caso se trataría de más de un recinto).

Pueden darse dos situaciones:

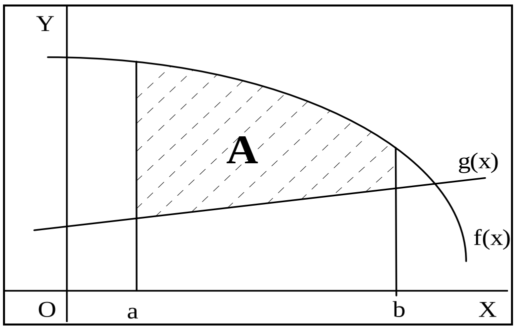
1) ***Ambas son siempre positivas o siempre negativas***.- En este caso es claro que:

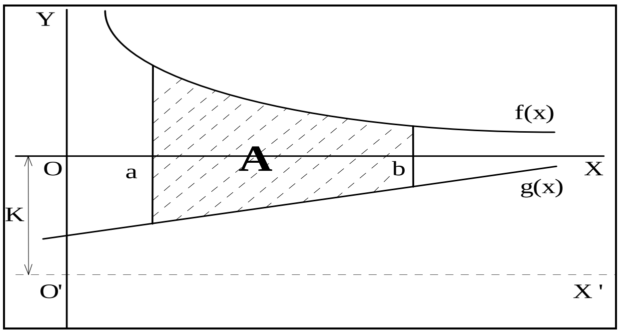
$$\mathbf{A} = \left| \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\mathbf{f(x)} - \mathbf{g(x)}] \mathbf{dx} \right|$$

2) ***Alguna función (o ambas) cambia de signo en [a,b]***. Obsérvese la figura: siempre podremos encontrar un número K tal que incrementando en todos los puntos el valor de f y g en el número k estaríamos en la situación primera, con lo cual el área sería:

$$\mathbf{A} = \left| \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [(\mathbf{f(x)} + \mathbf{K}) - (\mathbf{G(x)} + \mathbf{K})] \mathbf{dx} \right| = \left| \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\mathbf{f(x)} - \mathbf{g(x)}] \mathbf{dx} \right|$$

es decir, <u>sigue valiendo la misma fórmula</u>.





<u>C) Área del recinto cerrado comprendido entre dos funciones que se cortan</u>. Necesitamos determinar los puntos de corte (basta con la primera coordenada). Tomando a estos como extremos de integración, estamos en las situaciones anteriores.

<u>Ejercicio 1</u>.- Área del circulo en función del radio.

<u>2) VOLÚMENES</u>.

<u>A) Volumen de un cuerpo de revolución</u>.- Supongamos que f es continua en el intervalo [a,b]. Al girar el arco de la curva f comprendido entre las rectas x=a y x=b alrededor del eje OX se engendra un volumen cuya medida se trata de calcular.

Considerando una partición de orden n del segmento [a,b], en las mismas condiciones que en el tema anterior, obtenemos aproximaciones del volumen V, por defecto y por exceso, como suma de cilindros interiores y exteriores respectivamente: $\sum_{i=1}^{n} \pi m_i (x_i - x_{i-1}) \le V \le \sum_{i=1}^{n} \pi M_i (x_i - x_{i-1})$

Al aumentar n, las aproximaciones serán "mejores" y, en consecuencia la diferencia entre ambas puede hacerse tan pequeña como se quiera. Obsérvese que el problema es el mismo que el visto en la definición de la integral definida. En definitiva, podemos poner: $\mathbf{V} = \pi \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} [\mathbf{f(x)}]^2 \mathbf{dx}$

<u>Ejercicio 2</u>.- Volumen de la esfera de radio r.

<u>B) Cálculo del volumen por medio de las secciones</u>.- Supongamos que los extremos de un cuerpo, sobre el eje OX, correspondan a los puntos x=a y x=b.

Supongamos que para cada punto x de [a,b] podemos expresar, en función de x, el área S(x) de la sección producida sobre el cuerpo por el plano perpendicular por x al eje OX. (¡ ojo ! esto no siempre es posible, luego lo que vamos a decir a veces es irrealizable).

Para una partición de orden n del segmento [a,b] se puede aproximar el volumen V, por defecto y por exceso, como suma se volumen de cilindros interiores y exteriores respectivamente:

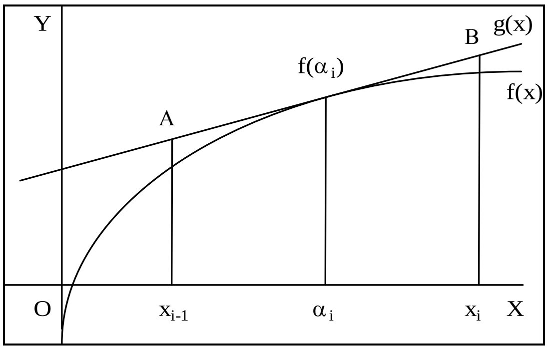
$$\sum_{i=1}^{n} s_i (x_i - x_{i-1}) \le V \le \sum_{i=1}^{n} S_i (x_i - x_{i-1})$$

siendo s_i y S_i la mínima y máxima sección en $[x_{i-1}, x_i]$.

Repitiendo razonamientos ya vistos, estas aproximaciones determinan, al aumentar n, un valor coincidente que es la integral: $\mathbf{V = \int_a^b S(x)dx}$

Obsérvese que en esta situación se incluyen los cuerpos de revolución, es decir, puede determinarse S(x) en función de x. Como el área de la sección en x sería $S(x)=\pi[f(x)]^2$ (es un circulo), de esta fórmula se obtiene, como caso particular, la vista en el apartado A).

3) SUPERFICIE DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN.



Sea f una función continua en [a,b] y con derivada continua en todos los puntos de (a,b).

Al girar el arco curva de extremos (a,f(a)) y (b,f(b)) alrededor del eje OX se engendra un cuerpo cuyo volumen hemos calculado en el apartado anterior. Se pretende ahora obtener su superficie.

Consideremos la repetida partición del segmento [a,b]. Sean α_i los puntos medios de los segmentos $[x_{i-1},x_i]$. Para cada segmento de la partición, $[x_{i-1},x_i]$, tomamos el tronco de cono generado al girar el trapecio señalado en la figura de la derecha alrededor del eje OX, donde AB un segmento de la tangente a f(x) en el punto $(\alpha_i,f(\alpha_i))$.

El área lateral de dicho tronco de cono, si tenemos en cuenta que, por el teorema de Pitágoras, el segmento AB mide:

$$|AB|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(g(x_i)-g(x_{i-1}))^2}=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+f'(\alpha_i)(x_i-x_{i-1})^2}=(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+f'(\alpha_i)^2}$$

donde g(x) es la recta tangente en α_i, vendrá dada por $S_i=\pi(g(x_1)+g(x_{i-1}))|AB| = 2\pi f(\alpha_i)|AB|$

Una aproximación de la superficie buscada será la suma de las n superficies anteriores. Aumentando n, aumenta el grado de aproximación, es decir, el valor de la superficie será el límite de la suma anterior al tender n a infinito. Así, podremos poner: $\mathbf{S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}dx}$.

<u>Ejercicio 3</u>.- Superficie de la esfera de radio r.

4) LONGITUD DE UNA CURVA.

Si f es una función continua en un intervalo [a,b], se pretende calcular la longitud L de la línea que representa a f entre los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)).

Si se considera la partición de siempre, cada división x_i determina sobre la curva un punto P_i, de forma que una aproximación de la longitud buscada es la suma de las longitudes de los segmentos $P_{i-1}P_i$:

$$\sum_{i=1}^{n}|P_{i-1}P_i|=\sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(f(x_i)-f(x_{i-1}))^2}$$

Si existe el supremo de todas las aproximaciones que se obtienen al variar la partición (aumentar la n), éste es la longitud de la curva, y decimos que la curva es <u>rectificable</u>.

Si la función f es derivable en (a,b), por aplicación del teorema del valor medio a cada segmento $[x_{i-1},x_i]$, podemos afirmar la existencia de al menos un punto $\alpha_i\in[x_{i-1},x_i]$ tal que $f(x_i)-f(x_{i-1}) = f'(\alpha_i)(x_i-x_{i-1})$ luego la aproximación anterior puede escribirse de la forma: $\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+f'(\alpha_i)^2}$

Por consiguiente, si f es rectificable, en el sentido antes expuesto, el valor de la longitud vendrá dado por la integral: $\mathbf{L = \int_a^b\sqrt{1+f'(x)^2}dx}$.

<u>Ejercicio 4</u>.- Calcula la longitud de la circunferencia en función del radio.

Tema 6: EJERCICIOS

6.1.- Calcula el área comprendida entre el eje OX, la recta $x=\pi/3$ y la curva $f(x)=tg(x)$.

6.2.- Calcula el área comprendida entre las funciones $f(x)=2x-x^2$ y $g(x)=-x$.

6.3.- Calcula el área común a dos círculos de radio 1 y centros en el origen y en (1,0).

6.4.- Halla el área limitada por $y=x^2-1$, $y=1/(1+x^2)$.

6.5.- Halla el área comprendida entre $y=x^2$ y el circulo $x^2+y^2=2$.

6.6.- Calcula la longitud del arco de curva $f(x)=\ln(x)$ comprendido entre los puntos de abscisa $x=1$, $x=\sqrt{2}$.

6.7.- Calcula la longitud del arco de la parábola $y^2=x$ que queda dentro de $x^2+y^2=4$.

6.8.- Halla la longitud del arco de la curva $f(x)=\ln(1-x^2)$ comprendido entre $x=1/3$ y $x=2/3$.

6.9.- Halla el volumen del cuerpo engendrado por la rotación, alrededor del eje OX, del arco de parábola $y=x^2$ comprendido entre $x=0$ y $x=4$.

6.10.- Halla el volumen del cuerpo engendrado al rotar, sobre el eje OX, la superficie comprendida entre $y=x^2$ e $y=x$.

6.11.- Igual que el anterior, para las curvas $y^2=4x$, $x^2=4y$.

6.12.- Resuelve los ejercicios 8.10 y 8.11 suponiendo que la rotación se realiza sobre el eje OY.

6.13.- Halla el volumen de un cono de altura H radio de la base R.

6.14.- Halla el volumen de un tronco de cono de altura H radios r y R.

6.15.- Halla el volumen de una pirámide regular de altura H y base cuadrada de lado L.

6.16.- Halla la superficie del cuerpo que se obtiene al girar alrededor del eje OX la parábola $y^2=x$ entre $x=0$ y $x=4$.

6.17.- Calcula la superficie del cuerpo generado al rotar $f(x)=sen(x)$ entre $x=0$ y $x=\pi$ alrededor del eje OX.

6.18.- Calcula el área lateral de un cono regular de altura H y radio de la base R.

6.19.- El mismo problema que el 8.17 supuesta la rotación alrededor del eje OY.

6.20.- Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x)=2x-e^{-2x}+1$, el eje OX y las rectas $x=1$, $x=-1$.