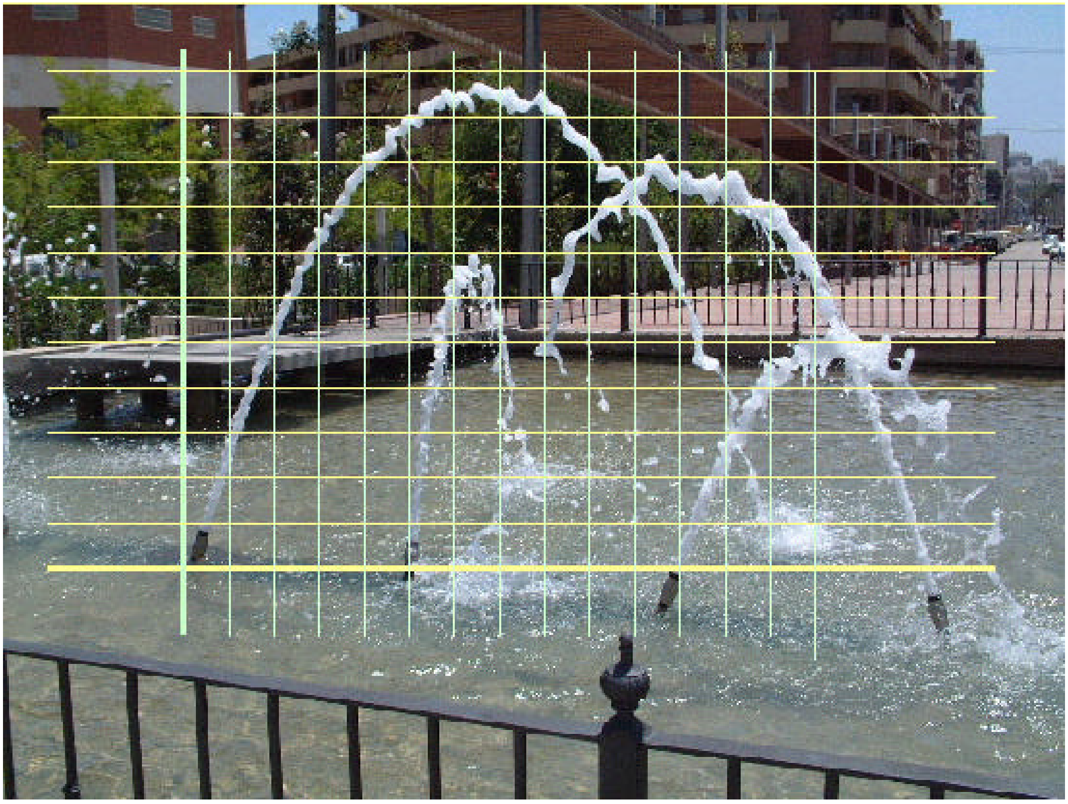
La Fuente de la plaza de América

José Antonio Mora. T^3 España
Publicado en la revista Innovaciones Educativas núm 4, pp 1 a 4. Santiago. Chile. 2003

En la plaza de América de la ciudad de Alicante (España) encontramos una fuente con alto contenido matemático. No es algo extraordinario ya que, como en muchas otras fuentes de cualquier ciudad, se lanza un chorro de agua a presión desde un estanque para que describa una curva y vuelva a caer a la superficie del agua. La imagen y el sonido del agua en movimiento es algo que los árabes conocían muy bien y nos dejaron el sistema de riego de la huerta valenciana y, con fines ornamentales, en el sistema de fuentes del Generalife, junto a la Alhambra de Granada.

Desde hace unos pocos años disponemos de nuevas herramientas que nos permiten trabajar con datos reales: ordenadores, cámaras digitales o escáneres y calculadoras gráficas que podemos utilizar para sacar las matemáticas escolares a la calle o introducir las matemáticas que hay en la vida cotidiana en el aula de matemáticas. Es una cuestión de matices.

En uno de los paseos del profesor de matemáticas buscaba una fuente en la que se pudiera aislar la trayectoria del agua en una instantánea fotográfica para poder tomar medidas de la trayectoria que describe. El fondo oscuro que proporcionan la vegetación y los edificios junto al color blanco del agua proporcionan el suficiente contraste para obtener una fotografía que se podrá analizar más tarde.



Se ha cuidado el que la fotografía esté tomada en un plano perpendicular a la trayectoria y se ha medido la distancia entre el punto de salida del agua y el lugar donde cae y ha resultado ser de 1,80 metros este es un dato importante para el estudio posterior

Con un programa de tratamiento de texto que permita un cierto retoque de imágenes, se puede cuadricular la fotografía para obtener las coordenadas de los puntos que conforman la trayectoria del agua, son los que aparecen a la derecha:

L1	L2
2,5	7,9
2,8	7,3
3,15	6,5
3,2	6,3
3,3	6
3,5	5,4
3,75	4,75
4	4,15
4,3	3,5
4,45	3,25
4,75	2,85
5,1	2,4
5,7	1,7
6,35	1,25
7	1,25
7,65	1,5
8,25	2
8,35	2,25
8,9	2,75
9,3	3,5
9,6	4,15
9,75	4,6
10,15	5,25
10,25	5,4
10,3	6
10,5	6,5
10,75	7,3

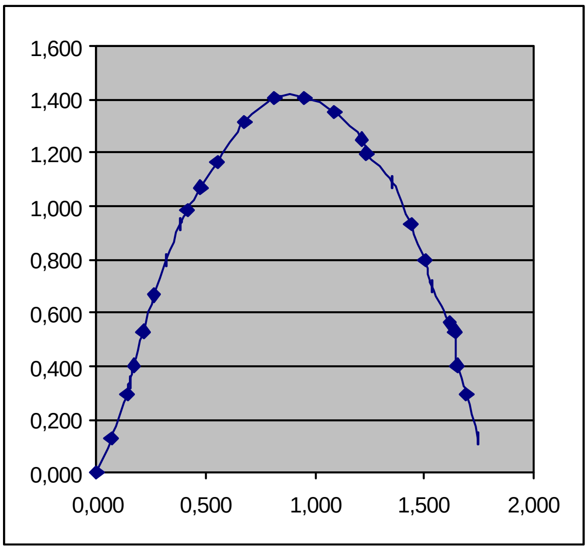
L3	L4
0,000	0,000
0,064	0,127
0,138	0,296
0,148	0,339
0,169	0,402
0,212	0,529
0,265	0,667
0,318	0,794
0,381	0,932
0,413	0,985
0,476	1,069
0,551	1,165
0,678	1,313
0,815	1,408
0,953	1,408
1,091	1,355
1,218	1,249
1,239	1,196
1,355	1,091
1,440	0,932
1,504	0,794
1,535	0,699
1,620	0,561
1,641	0,529
1,652	0,402
1,694	0,296
1,747	0,127

Confeccionamos las dos primeras listas L_1 y L_2 con los datos que obtenemos al observar los puntos en los que la parábola atraviesa la cuadrícula según la medida de la regla que va incluida el programa informático. Si quisiéramos tomar estas medidas en la realidad habría que mojarse demasiado lo que, en una ciudad mediterránea como Alicante, no es un grave problema. Las dificultades vendrían de la consideración de los alumnos hacia el profesor que se mete en el estanque, y eso sin hablar de las autoridades educativas y municipales.

Las fórmulas a utilizar transforman las listas de forma que el problema quede lo más simplificado que podamos. Para eso el punto (2.5 , 7.9) ha de convertirse en el origen de coordenadas (0 , 0). Además los 8,5 cm de distancia (medidos sobre la fotografía), desde el punto en que está instalado el surtidor y el punto en el que el chorro vuelve a contactar con la superficie del agua, ha de convertirse en 1.80 metros en la realidad. Definimos dos listas L_3 y L_4 de la siguiente forma:

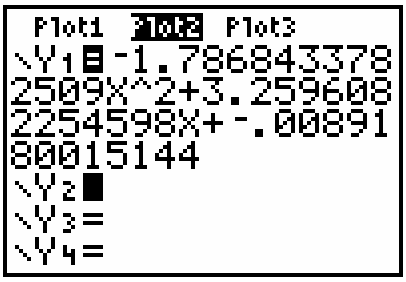
$$L_3 = (L_1 - 2.5)\frac{1.8}{8.5}$$

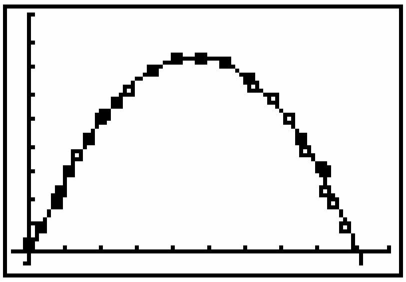
$$L_4 = (7.9 - L_2)\frac{1.8}{8.5}$$



La gráfica a la derecha se ha realizado con una hoja de cálculo. En ella podemos ver que los puntos de la caída del chorro tienen menos precisión que los de la ascensión del agua.

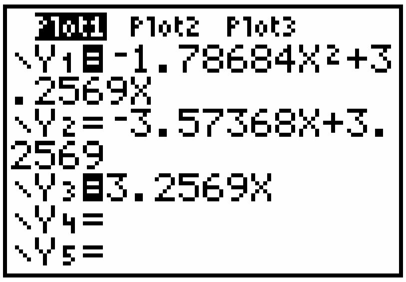
Ahora es cuando vamos a echar mano de la calculadora gráfica para buscar la función que más se aproxima a los puntos obtenidos. Se observa con claridad la forma de la parábola con lo que la regresión cuadrática nos proporcionará un buen ajuste con una función de segundo grado. Realizamos los cálculos con la TI83 y obtenemos

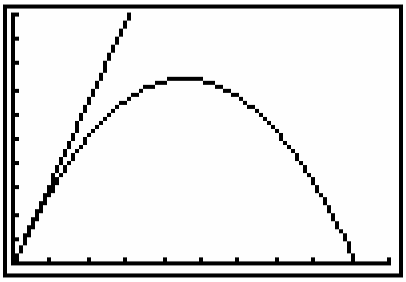




Podemos aportar nuevos elementos de análisis de la solución obtenida ya que ha de pasar por el origen de coordenadas, esto hace que quitemos el término independiente de la parábola y nos quedamos con la función $y = -1.78684x^2 + 3.2569x$, parábola que tiene el coeficiente de segundo grado negativo ya que las ramas van hacia abajo.

Su derivada es $y' = -3.57368x + 3.2569$ (también podríamos haber utilizado la derivada numérica de la calculadora gráfica). Cuando x=0 la derivada y'=3.2569 y con ello tenemos que el ángulo con el que se ha colocado el grifo es arctg 3.2569 =72.93º. En la gráfica tenemos la función y la tangente a la curva en el (0,0)





El cálculo de la altura alcanzada por el agua se puede enfocar de varias formas: el máximo de la parábola con el menú CALC, el valor de y cuando x toma el valor central entre los puntos de corte, estudiar dónde se anula la función derivada, etc. Obtendremos así un valor aproximado de 1,50 metros de altura.

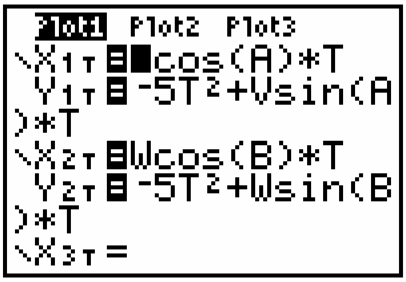
Más tarde podemos tomar una vía de trabajo complementaria con las ecuaciones paramétricas del tiro oblicuo con el fin de obtener el tiempo que una partícula de agua está en el aire y la velocidad inicial con la que sale el agua del surtidor:

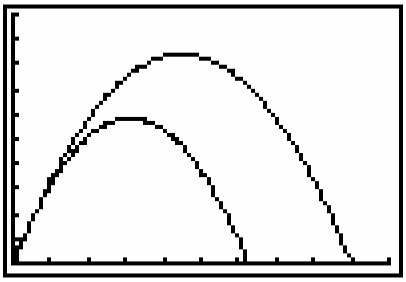
$$\begin{array}{c} x = v_{0x}t \\ y = -5t^2 + v_{0y}t \end{array} \quad \text{donde} \quad \begin{array}{c} v_{0x} = v_0 \cos 72.93^{\circ} \\ v_{0y} = v_0 sen 72.93^{\circ} \end{array} \quad \text{y así} \quad \begin{array}{c} x = 0.2935 v_0 t \\ y = -5t^2 + 0.956 v_0 t \end{array} \quad (*)$$

Para realizar los cálculos del tiempo y la velocidad inicial basta con tener en cuenta que la curva pasa por el punto (1.80 , 0).

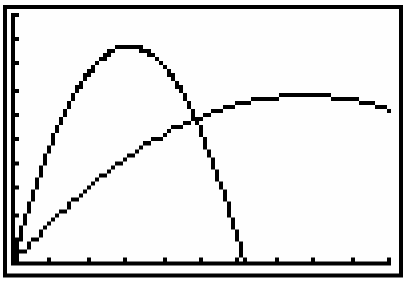
Sustituimos x=1.80 e y=0 en (*) para llegar a un sistema de dos ecuaciones, una lineal y otra cuadrática, de las que obtenemos $t = 1.083$ con lo que sabemos que una partícula de agua que sale, tardará poco más de un segundo en caer . Además $v_0 = 5.664$, es decir, que el agua sale del chorro con una velocidad inicial de 5.664 metros por segundo.

Llegados a este punto, podemos dedicarnos a investigar sobre las fuentes de la ciudad, estudiar las inclinaciones de los grifos y la velocidad inicial para producir nuevas parábolas. Introducimos las ecuaciones paramétricas de dos chorros distintos y podemos probar con diferentes valores para el ángulo y la velocidad inicial. Las gráficas de la derecha se han tomado para la misma inclinación, 75º, y con velocidades iniciales de 5 y 6 m/s.





Podemos probar ahora para varios chorros lanzados con una velocidad de 6 m/s, a la izquierda con ángulos de 60º y 80º y a la derecha con ángulos de 85º y 40º



Y ahora intentar construir una fuente con las características descritas anteriormente.